1. Programmation linéaire

1.1 Introduction

Les problèmes de la programmation linéaire se posent lorsqu'on cherche à minimiser (ou maximiser) une fonction linéaire de plusieurs variables, appelée fonction coût ou objectif, telle que ces variables sont soumises à des inéquations linéaires, appelées contraintes. Le principal outil de la programmation linéaire est la méthode de simplexe développée par G. B. Dantzig à partir de 1947.

Exemple. *Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2 à partir de 3 matières M_1, M_2 et M_3. Les stocks sont 300 tonnes de M_1, 400 tonnes de M_2 et 250 tonnes de M_3. Pour fabriquer une tonne de P_1, il faut 1 tonne de M_1 et 2 tonnes de M_2. Pour fabriquer une tonne de P_2, il faut 1 tonne de M_1, 1 tonne de M_2 et 1 tonne de M_3. La vente d'une tonne de du produit P_1 rapporte un profit de 50 Dhs, alors que celle du produit P_2, un profit de 100 Dhs. Quelles quantités des produits P_1 et P_2, l'entreprise doit-elle fabriquer pour maximiser son profit ?*

Solution : Les données peuvent être présentées par le tableau suivant

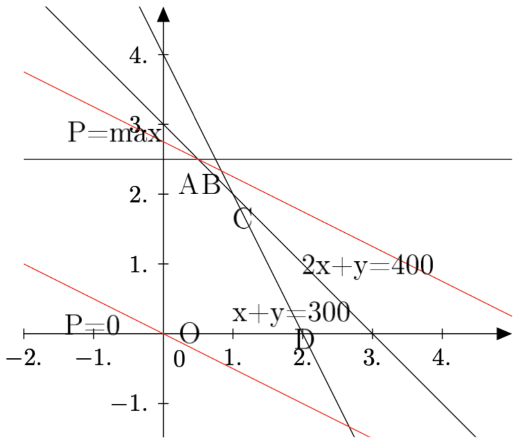
Produits / matières	M_1	M_2	M_3	Profits
P_1	1	2	0	50
P_2	1	1	1	100
stocks	300	400	250	

Soient x et y les quantités à fabriquer de P_1 et P_2 respectivement. Le problème se formule alors

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max f(x,y) = 50x + 100y \\ x + y \leq 300 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 250 \\ x \geq 0,\, y \geq 0. \end{cases}$$

Chaque programme de fabrication peut être représenté dans un plan par un point (x,y). Soit D

l'ensemble des points (x,y) qui vérifient toutes les contraintes, alors le problème consiste à trouver un point de D qui maximise la fonction profit f. Graphiquement, on a

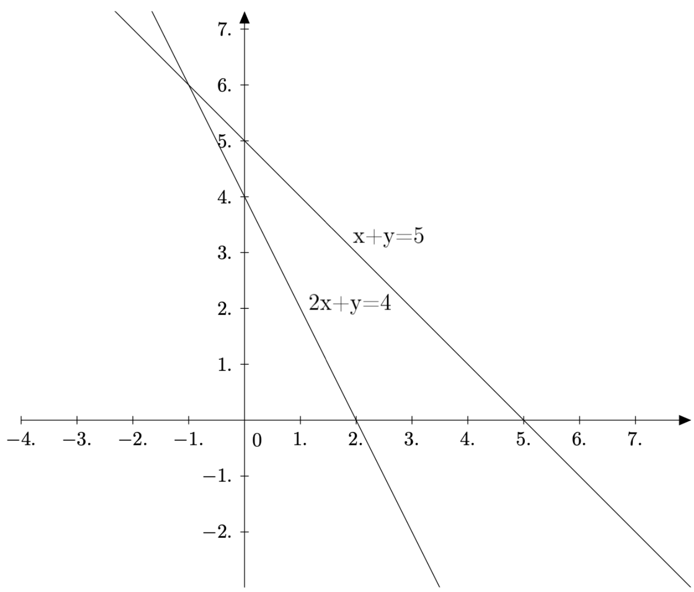


Les droites $50x+100y=P$ sont des droites parallèles à la droite $50x+100y=0$. Plus ces droites s'éloignent de l'origine plus le profit P devient élevé. Il s'agit donc de trouver un point de D où il serait possible de faire passer une droite parallèle à la droite $50x+100y=0$ qui soit la plus éloignée de cette droite. Ce point est donc $(50,250)$ qui correspond à un profit $P=f(50,250)=27500$.

Exemple. Soit le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min 3x+4y \\ x+y\geq 5 \\ 2x+y\leq 4 \\ x\geq 0,\, y\geq 0. \end{cases}$$

Graphiquement, on trouve

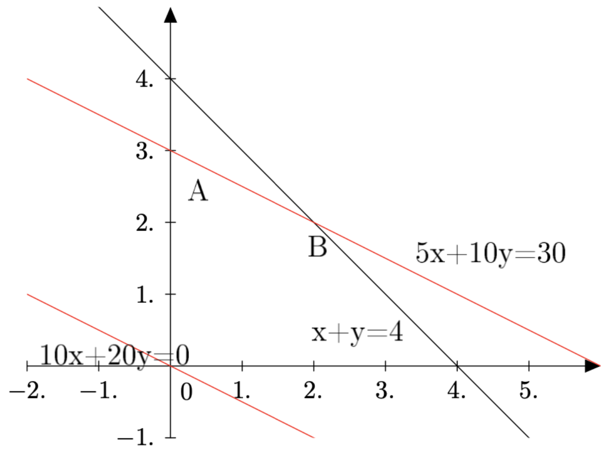


Il n'y a aucune solution qui vérifie toutes les contraintes : le domaine D est vide.

Exemple. Soit le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max\ 10x+20y \\ x+y \leq 4 \\ 5x+10y \leq 30 \\ x \geq 0,\, y \geq 0. \end{cases}$$

Graphiquement, on trouve

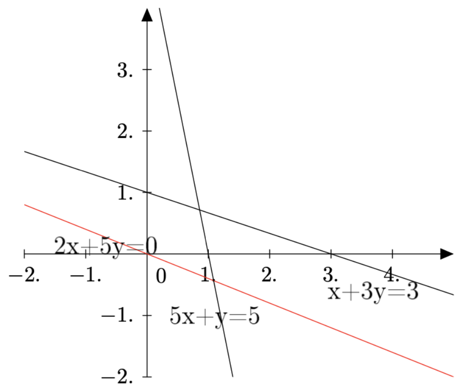


Les points du segment $[AB]$ maximise la fonction $10x+20y$, il y'a une infinité de solutions.

Exemple. Soit le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max\ 2x+5y \\ x+3y \geq 3 \\ 5x+y \geq 5 \\ x \geq 0,\, y \geq 0. \end{cases}$$

Graphiquement, on trouve



Le maximum ne sera jamais atteint, la solution est infinie.

Synthèse À partir des exemples précédents, on constate alors que :

1. Un problème de programmation linéaire peut avoir :
   (a) une solution unique,
   (b) Aucune solution,
   (c) Une infinité de solutions,
   (d) Une solution infinie.
2. On constate que lorsqu'une solution finie existe, elle se présente en un sommet du domaine des solutions admissibles. Cette propriété a été démontrée dans le cas général et elle forme la base de la méthode de simplexe.
3. La résolution graphique a été possible grâce au nombre réduit de variables et contraintes. Dans les cas pratiques, cette méthode serait impossible à utiliser, d'où la nécessité de trouver une méthode de résolution qui peut être utilisée dans le cas général.

Remarque. Les méthodes permettant de trouver les valeurs minimales de f, sont également celles permettant de trouver les valeurs maximales de f. Pour s'en convaincre, il suffit de remarque que

$$\max_{x\in U} f(x) = -\min_{x\in U}(-f(x)).$$

1.2 Fondements de la programmation linéaire

1.2.1 Définitions et résultats fondamentaux

On appelle problème de programmation linéaire, un problème d'optimisation de la forme

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min f(x), \\ g_i(x) = 0\,,\ \forall i \in I, \\ g_j(x) \leq 0\,,\ \forall j \in J, \\ g_k(x) \geq 0\,,\ \forall k \in K, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

où la fonction coût f et les fonctions contraintes g_ℓ sont des fonctions linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Le domaine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$, définit par le système des contraintes suivant

$$\begin{cases} g_i(x) = 0\,,\ \forall i \in I, \\ g_j(x) \leq 0\,,\ \forall j \in J, \\ g_k(x) \geq 0\,,\ \forall k \in K, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

est appelé domaine des solutions réalisables (admissibles), et tout élément $x \in \mathcal{P}$ est appelé solution réalisable (admissible) du problème linéaire (P).

Remarque. Une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite linéaire si pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$h(x) = (d,x) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i = d^T x \quad \text{où} \quad d = (d_1, \cdots, d_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.1 On appelle solution optimale du programme linéaire (P), toute solution réalisable (admissible) $x^* \in \mathcal{P}$ pour laquelle la fonction coût f est optimale, c-à-dire

$$\forall x \in \mathcal{P}, \quad f(x^*) \leq f(x).$$

La valeur $f(x^*)$ est appelée le coût optimal ou optimum du programme linéaire (P).

La formulation générale d'un programmation linéaire (P) peut prendre différentes formes particulières permettant de vérifier les hypothèses et prérequis des méthodes de résolution choisies et de simplifier la présentation des algorithmes d'optimisations correspondants.

Définition 1.2 — Forme canonique. Un programme linéaire sous forme canonique s'écrit

$$(P) \; : \; \begin{cases} \min f(x), \\ g_k(x) \geq 0\,, \; \forall k \in K, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

Autrement dit, toutes les contraintes d'inégalités sont dans le même sens, les variables de décision sont positives ou nulles et les contraintes d'égalité en sont absentes.

Définition 1.3 — Forme standard. Un programme linéaire sous forme standard s'écrit

$$(P) \; : \; \begin{cases} \min f(x), \\ g_i(x) = 0\,, \; \forall i \in I, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

Les variables de décision sont positives ou nulles et les contraintes d'inégalités sont absentes.

Remarque. — Régles de passage. Tout programme linéaire général peut être mis sous forme standard (resp. sous forme canonique). Les passages d'une forme à l'autre sont possibles à l'aide des propriétés élémentaires suivantes.

- Toute inégalité $\leq$ est équivalente à une inégalité $\geq$ en multipliant ses termes par -1,
- Toute égalité est équivalente à deux inégalités ; $g_i(x) = 0 \iff g_i(x) \leq 0$ et $g_i(x) \geq 0$,
- Toute inégalité $\leq$ (resp. $\geq$) peut être transformée en une égalité au moyen de "variables d'écart", ainsi $g_k(x) \leq b$ (resp. $g_j(x) \geq c$) devient
$$g_k(x) + z = b \;\; (\text{resp. } g_j(x) - z' = c) \quad \text{avec} \quad z, z' \in \mathbb{R}_+,$$
- Toute variable x_i libre en signe peut être remplacée par deux variables $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$ avec
$$x = x_i^+ - x_i^- \quad \text{où} \quad x_i^+ = \max(x_i, 0) \;\; \text{et} \;\; x_i^- = \max(-x_i, 0).$$

Exemple. 1. Tout programme linéaire (P) peut se mettre sous forme canonique (P_c) suivante :

$$(P) \; : \; \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq -5, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \iff \quad (P_c) \; : \; \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2 \geq 0, \\ -x_2 - 5 \geq 0, \\ -x_1 - x_2 + 3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Tout programme linéaire (P) peut se mettre sous forme standard (P_s) suivante :

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ -5x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (P_s)\ :\ \begin{cases} \min 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - 1 = 0, \\ -5x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (P_s)\ :\ \begin{cases} \min -y_3 + y_4 + x_2 + 2y_5 \\ 2y_3 - 2y_4 + x_2 + y_5 + y_1 - 1 = 0, \\ y_3 - y_4 - 2x_2 - y_5 - y_2 - 2 = 0, \\ -3y_3 + 3y_4 + x_2 + y_5 - 3 = 0, \\ y_1, y_2, , y_3, y_4, x_2, y_2, y_5 \geq 0. \end{cases}$$

Remarque. 1. Le problème sous forme canonique (P_c) s'écrit matricielement sous la forme

$$(P_c)\ :\ \begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x, \\ Ax \geq b, \\ x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $c = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ est le vecteur des coûts avec n le nombre de variables, $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ le vecteur des variables de décision, $b = (b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ est le vecteur des contraintes avec m le nombre des contraintes et A la matrice des contraintes d'ordre $m \times n$.

2. Le problème sous forme standard (P_s) s'écrit matricielement sous la forme

$$(P_s)\ :\ \begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x, \\ Ax - b = 0, \\ x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où $c = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ est le vecteur des coûts avec n le nombre de variables, $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ le vecteur des variables de décision, $b = (b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ est le vecteur des contraintes avec m le nombre des contraintes et A la matrice des contraintes d'ordre $m \times n$.

1.2.2 étude des solutions d'un programme linéaire

Définition 1.4 — Polyèdre. On appelle polyèdre l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des points vérifiant un système d'inéquations linéaires toutes dans le même sens. Autrement dit, un polyèdre $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble décrit par

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ ; \ Ax \geq b \right\} \ \text{ où } \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ b \in \mathbb{R}^m.$$

Définition 1.5 — Polytope. Un polyèdre convexe et borné est appelé polytope convexe.

Théorème 1.1 Le domaine des solutions réalisables d'un programmation linéaire (P) est un polyèdre convexe qui peut être borné ou non borné.

Remarque. 1. L'ensemble des solutions réalisables du programme (1.1) est un polyèdre convexe.

$$\mathcal{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\,;\; Ax - b \geq 0 \;\text{ et }\; x \geq 0\right\}.$$

2. Le domaine des solutions réalisables du programme linéaire (1.2) est un polytope convexe.

$$\mathcal{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\,;\; Ax - b = 0 \;\text{ et }\; x \geq 0\right\}.$$

Définition 1.6 — Points extrémal-Sommet. étant donné un convexe C, un vecteur $x \in C$ est dit point extrémal de C s'il n'existe pas deux vecteurs $y, z \neq x \in C$, et de réel $\lambda \in]0,1[$ tel que

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z.$$

étant donné un polyèdre $\mathcal{P}$, un point extrémal du convexe $\mathcal{P}$ est dit sommet du polyèdre $\mathcal{P}$.

Remarque. Un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est sommet du polyèdre $\mathcal{P}$ si pour tout $y, z \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in]0,1[$, on a

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \implies y = z = x.$$

Une définition équivalente du point extrémal de $\mathcal{P}$ (ou sommet de $\mathcal{P}$) est la suivante.

Définition 1.7 — Points extrémal. étant donné un polyèdre $\mathcal{P}$, un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est dit sommet de $\mathcal{P}$ s'il existe un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $y \neq x$ de $\mathcal{P}$, on a

$$c^T x < c^T y.$$

Dans la suite, on considère les programmes linéaires donnés sous forme standard (1.2), alors

$$\mathcal{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\,;\; Ax - b = 0 \;\text{ et }\; x \geq 0\right\}.$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

- le polyèdre des solutions réalisables $\mathcal{P}$ est non vide,
- la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \leq n$,
- la matrice A est de rang maximal, c'est-à-dire $rang(A) = m$.

Si l'hypothèse de rang sur A n'est pas satisfaite, cela signifie que le système linéaire $Ax = b$ contient des contraintes redondantes qui peuvent être éliminées pour obtenir un système d'équations linéaires vérifiant l'hypothèse de rang et définissant un polyèdre identique au polyèdre initial.

Définition 1.8 — Base du programme linéaire. On appelle base du programme linéaire, toute sous-matrice régulière $B = [A^{b(1)}, \cdots, A^{b(m)}]$ d'ordre m, extraite de la matrice des contrainte A.

Définition 1.9 — Solution de base. Soit $B = [A^{b(1)}, \cdots, A^{b(m)}]$ une base du programme linéaire. On appelle solution de base B, toute solution de $Ax = b$ de la forme

$$x^* = [\cdots, x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}, \cdots]^T \quad \text{où} \quad \forall i \notin \{b(1), \cdots, b(m)\},\; x_i = 0.$$

- Si $x_B = [x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}]^T \geq 0$, cette solution est dite solution de base réalisable (admissible),

- Si $x_B > 0$, la solution de base réalisable est dite non-dégénéré, et dégénéré sinon c-à-dire si au moins une variable de base est nulle.

Remarque. Sous les hypothèses précédentes, Il est toujours possible de construire une solution de base x^* de $\mathcal{P}$ d'un programme linéaire sous forme standard :

- Extraire de la matrice A une sous-matrice $B = [A^{b(1)}, \cdots, A^{b(m)}] \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversible,
- Choisir $x_i = 0$ pour tout $i \notin \{b(1), \cdots, b(m)\}$ (annuler les variables hors base),
- Résoudre en $x_B = [x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}]^T$, le système linéaire $Bx_B = b$, donc

$$x_B = B^{-1}b.$$

- La solution de base est alors donnée par

$$x^* = [\cdots, x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}, \cdots]^T \quad \text{où} \quad \forall i \notin \{b(1), \cdots, b(m)\},\ x_i = 0.$$

Exemple. — 2D. Considérons le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard du programme (P) est donnée par

$$(P_s)\ :\ \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 + z_1 = 2, \\ x_2 + z_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + z_3 = 3, \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Les données du programme (P_s) s'écrivent sous la forme matricielle suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En choisissant les colonnes $(3,4,5)$ de A, on obtient une base B_1 du programme linéaire

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [A_3, A_4, A_5].$$

On a $x_{B_1} = B_1^{-1}b = b = [2,2,3]^T$, donc la solution de base B_1 est donnée par

$$x_1^* = [x, y, z_1, z_2, z_3]^T = [0, 0, 2, 2, 3]^T$$

qui est une solution de base réalisable puisque tous ses composantes sont positives ou nulles et non-dégénérée puisque $x_{B_1} > 0$. Par contre la solution de base associée à la base

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [A_1, A_2, A_5].$$

n'est pas réalisable (non admissible), puisque on a

$$x_2^* = B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [2, 2, 0, 0, -1]^T.$$

Définition 1.10 — Variables de base. Les variables dont les indices appartiennent à

$$\{b(1), \cdots, b(m)\}$$

sont appelées variables de base, et les autres variables sont appelées variables hors base.

Soit B une base du programme linéaire. Après éventuelle permutation des colonnes de A, on obtient

$$A = [B\,;R] \quad ; \quad x = (x_B\,; x_R)^{\mathrm{T}} \quad ; \quad c = (c_B\,; c_R)^{\mathrm{T}}$$

Alors, la solution de base B est toute solution de $Ax = b$ de la forme $[x_B\,; 0]^{\mathrm{T}}$, et en plus on a

- le système $Ax = b$ se récrit sous la forme

$$Bx_B + Rx_R = b.$$

- si x est une solution de base associée à B, alors $x_R = 0$ d'où $Bx_B = b$, et donc

$$x_B = B^{-1} b.$$

On appelle x_B (resp. c_B) une variable de base B (resp. coût des variables de base B), et on appelle x_R (resp. c_R) une variable hors-base B (resp. coût des variables hors-base B).

Exemple. — 2D. Reprenons le PL de l'exemple précédent dont la forme standard est

$$(P_s)\ :\ \begin{cases} \min\ -2x_1 - x_2 \\ x_1 + z_1 = 2, \\ x_2 + z_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + z_3 = 3, \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas $B_1 = [A_3, A_4, A_5]$, les variables de base sont les variables d'écart z_1, z_2 et z_3 et les variables hors base sont x_1 et x_2. Et dans le second $B_2 = [A_1, A_2, A_5]$, les variables de base sont les variables x_1, x_2 et z_3 et les variables hors base sont z_1 et z_2.

Proposition 1.1 Soit le programme linéaire sous forme standard (1.2), alors

1. s'il existe une solution réalisable, alors il doit exister une solution de base réalisable.
2. s'il existe une solution optimale, alors il doit exister une solution de base optimale.

Le théorème suivant stipule que x^* est un point extrémal du polyèdre $\mathcal{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b,\ x \geq 0\right\}$ si et seulement si x^* est une solution de base réalisable du programme linéaire (1.2).

Théorème 1.2 — Caractérisation des sommets du polyèdre $\mathcal{P}$. L'ensemble des sommets du polyèdre $\mathcal{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b,\ x \geq 0\right\}$ est égale à l'ensemble des solutions de base réalisables.

Si l'origine $0 \in \mathcal{P}$ (de façon équivalente si $b = 0$), on notera qu'il est déjà un sommet de $\mathcal{P}$

$$\forall y \geq 0, z \geq 0, \forall \lambda \in]0,1[;\ \ 0 = \lambda y + (1-\lambda) z \implies y = z = 0.$$

Pour examiner les autres sommets, à chaque point $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$I^*(x) = \{j \in \{1, \cdots, n\};\ x_j > 0\}.$$

Quitte à réordonner les composantes de x, on peut supposer que

$$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \ \text{ avec } \ \ k = Card\,(I^*(x)).$$

Preuve. *Soit $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ un point extrémal (sommet) de $\mathcal{P}$. Il suffit de montrer que les colonnes A_i de A associés aux $x_i > 0$ (c-à-dire associés aux $j \in I^*(x)$) forment une famille libre. Par l'absurde, supposons $\left\{A_j;\ j \in I^*(x)\right\}$ liée, alors il existe $w_1, \ldots, w_k$ non tous nuls, tels que*

$$\sum_{j=1}^{k} w_j A_j = 0.$$

Posons $w = (w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \neq 0$, alors $Aw = \sum_{j=1}^{k} w_j A_j = 0$. Or $x_j > 0$ pour tout $j \in I^*(x)$, alors il existe $\theta \neq 0$ suffisamment petit tel que $x_j \pm \theta w_j \geq 0$. D'autre part, rappelons que

$$x_j \pm \theta w_j = 0 \ \ \textit{pour tout} \ \ j \notin I^*(x),$$

et donc on obtient que $z_1 = x + \theta w \geq 0$ et que $z_2 = x - \theta w \geq 0$. Et puisque, $Aw = 0$, on a

$$A z_i = A(x \pm \theta w) = Ax \pm Aw = Ax = b.$$

On conclut que z_1 et z_2 appartiennent à $\mathcal{P}$, et que $z_1 \neq z_2$ puisque $\theta w \neq 0$. Mais, les relations

$$x = \frac{x + \theta w}{2} + \frac{x - \theta w}{2} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}$$

montrent alors que x n'est pas un point extrémal de l'ensemble $\mathcal{P}$, absurde.

Inversement, soit $x = [x_B; 0] = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ une solution de base B réalisable, et montrons que $x \in \mathcal{P}$ est extrémal. Soit $u = (u_1 \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n) \geq 0$ et $v = (v_1 \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n) \geq 0$ deux points de $\mathcal{P}$ et $\lambda \in]0,1[$, et supposons que l'on puisse écrire

$$x = \lambda u + (1-\lambda) v \quad (\textit{remarquer que} \ \ I^*(u) \cup I^*(v) \subset I^*(x)).$$

Il en résulte alors que pour tout $i \in \{m+1, \ldots, n\}$, on a $\lambda u_i + (1-\lambda) v_i = 0$ et donc

$$\forall i \in \{m+1, \ldots, n\}, \quad u_i = v_i = 0.$$

Par suite, on peut écrire $u = [u_B; 0]^T$ et $v = [v_B; 0]^T$, et comme u, $v \in \mathcal{P}$, on en déduit

$$\forall z \in \{u, v\}, \ \ Az = [B; R] \begin{bmatrix} z_B \\ 0 \end{bmatrix} = Bz_B = b.$$

Finalement, on obtient $u_B = v_B = B^{-1} b = x_B$, et donc x est un point extrémal de $\mathcal{P}$.

■

Avec cette caractérisation, on est en mesure de démontrer la propriété clef suivante.

Théorème 1.3 Si le problème linéaire sous forme standard (1.2) admet une solution, alors (au moins) un sommet de $\mathcal{P}$ est également solution.

Preuve. *Soit $x \in \mathcal{P}$ une solution du problème* (1.2). *Si l'ensemble $I^*(x) = \emptyset$, alors $x = 0$, et on a vue que l'origine est un sommet du polyèdre $\mathcal{P}$ si elle lui appartient. Si $I^*(x) \neq \emptyset$, alors*

- *ou bien les vecteurs colonnes A_j, $j \in I^*(x)$ de la matrice A sont linéairement indépendants, donc forment une base du problème* (1.2) *dont x est la solution de base associée, et ainsi x est un sommet de $\mathcal{P}$, d'après le Théorème 1.2,*
- *ou bien il existe $w = (w_j)_{1 \leq j \leq n}$ non nul tel que*

$$\max_j w_j > 0 \text{ (l'une des } w_j \text{ est } > 0), \quad \forall\, j \notin I^*(x)\,,\; w_j = 0\,, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j A_j = Aw = 0.$$

Considérons les points de $\mathbb{R}^n$ de la forme $x + \theta\, w$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Ils vérifient, d'une part

$$A(x + \theta\, w) = Ax + \theta\, Aw = Ax = b \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

Comme, on a

$$(x + \theta\, w)_j = x_j + \theta\, w_j = \begin{cases} x_j + \theta\, w_j & si \quad x_j > 0, \\ 0 & si \quad x_j = 0. \end{cases}$$

Alors, on en déduit qu'il existe deux réels θ_0 et θ_1 donnés par

$$-\infty < \theta_0 = \max\big\{ -x_j/w_j \;;\; j \in I^*(x) \text{ et } w_j > 0 \big\} < 0.$$

$$0 < \theta_1 \leq \min\big\{ -x_j/w_j \;;\; j \in I^*(x) \text{ et } w_j < 0 \big\} \leq +\infty.$$

Par suite, les points $x + \theta\, w \in \mathbb{R}^n$ vérifient d'autre part

$$\forall\, \theta \in [\theta_0, \theta_1]\,, \quad x + \theta\, w \in \mathcal{P}.$$

Comme la fonction objective f est linéaire, alors pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, on a

$$f(x + \theta\, w) = f(x) + \theta\, f(w).$$

Ce qui impose $f(w) = 0$, puisque $f(x) = \min_{z \in \mathcal{P}} f(z)$. Autrement dit, les points $x + \theta\, w$ avec $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ sont tous solution du problème (1.2). *Puisque, par définition de θ_0, l'une des composantes $u_j + \theta_0\, w_j$ où $j \in I^*(x)$ s'annule, on a construit une solution $x' = x + \theta_0\, w$ pour laquelle on a*

$$I^*(x') \subsetneq I^*(x), \quad \text{et donc} \quad Card(I^*(x')) < Card(I^*(x)).$$

Alors ou bien les vecteurs colonnes A_j, $j \in I^*(x')$ sont linéairement indépendants et donc la solution x' est un sommet de $\mathcal{P}$, ou bien ces colonnes sont linéairement dépendants, et dans ce cas, on recommence le raisonnement précédent. Puisque l'application de ce procédé a pour effet de diminuer d'au moins une unité le nombre des colonnes A_j considérés, on aboutit nécessairement à une solution qui est aussi un sommet après un nombre fini d'itérations de ce procédé.

■

Comme corollaire de ces deux théorèmes, on a les propriétés sur les sommets suivantes.

Corollaire 1.1 Si le polyèdre $\mathcal{P}$ n'est pas vide, il possède au moins un sommet. Par ailleurs, les sommets de $\mathcal{P}$ sont en nombre fini.

Preuve. *Considérons programme linéaire suivant : trouver* $(x^*, \tilde{x}^*)$ *tel que*

$$\begin{cases} (x^*, \tilde{x}^*) \in \tilde{\mathcal{P}} = \{(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \ ; \ Ax + \tilde{x} = b\}, \\ \tilde{f}(x^*, \tilde{x}^*) = \min\limits_{(x^*, \tilde{x}^*) \in \tilde{\mathcal{P}}} \tilde{f}(x, \tilde{x}) \ \ avec \ \ \tilde{f}(x, \tilde{x}) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{x}_i. \end{cases}$$

Si l'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide, ce problème admet déjà pour solutions tous les couples $(x, 0)$, où $x \in \mathcal{P}$. II suffit donc d'appliquer Ie théorème 1.3 à l'une quelconque de ces solutions, et d'utiliser ensuite la caractérisation des sommets donnée au théorème 1.2. Cette dernière montre également que les sommets sont en nombre fini, puisque le nombre de sommets de $\mathcal{P}$ est exactement le nombre de solutions de bases extraites de la matrice A (qui égale au nombre de façons de choisir des vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs A_j de la matrice A), et ce dernier est inférieure au nombre C_n^m de possibilités de choisir m colonnes de A parmi ces n colonnes.

■

Corollaire 1.2 Si le problème sous forme standard (1.2) admet une solution optimale, alors il doit exister un point extrémal de $\mathcal{P}$ qui est une solution optimale.

Théorème 1.4 — Optimalité en un sommet. Soit U un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ et Z une fonction linéaire sur U. Si l'optimum de Z sur U est atteint en plusieurs sommets de U, alors il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points sommets.

La démonstration repose sur le théorème de Krein-Milmann qui postule que tout point d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est combinaison convexe de ces sommets.

Preuve. *Soient $y_1, \ldots, y_k$ les sommets de U et x une combinaison convexe de ces sommets, alors*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i \quad avec \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}, \ \lambda_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Soit $Z^* = \min\limits_{y \in U} Z(y)$, alors pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$, on a $Z^* = Z(y_i)$, et par linéarité de Z, il vient

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z(y_i) = \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\Big) Z^* = Z^* \quad (car \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1).$$

■

1.2.3 Caractérisation des bases et des solutions de bases optimales

Définition 1.11 — Coût réduit. Soit x une solution de base (associée à la base B) et c_B le vecteur de la fonction coût associé aux variables de base. Pour j donné, le coût réduit $\bar{c}_j$ de la variable x_j est défini par

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

Remarque. Les coûts réduits associés aux variables de base (resp. hors-base) sont donnés par

$$\bar{c}_B^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} B = 0 \quad (\text{resp. } \ \bar{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R).$$

Exemple. — 2D. Reprenons le PL de l'exemple précédent dont la forme standard est

$$(P_s) \ : \ \begin{cases} \min \ -2x_1 - x_2 \\ x_1 + z_1 = 2, \\ x_2 + z_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + z_3 = 3, \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Rappelons que la solution de base associée $B_2 = [A_1, A_2, A_5]$ est donnée par

$$x_2^* = [2, 2, 0, 0, -1]^T.$$

Les variables de base étant x_1, x_2 et z_3, alors les coûts associés sont donnés par le vecteur des coefficients associés dans la fonction objective, c'est-à-dire

$$c_{B_2}^T = [-2, -1, 0].$$

Cela permet de calculer les coûts réduits associés à la solution de base associée à B_2, soit

$$\forall j \in \{1, \cdots, 5\}\,; \quad \overline{c}_j = c_j - c_{B_2}^T B_2^{-1} A_j.$$

Le vecteur des coûts réduits est donc $\overline{c}^T = [0, 0, 2, 1, 0]$ (les coûts réduits $\overline{c}_{B_2}^T$ sont bien nuls).

Définition 1.12 — Multiplicateurs du simplexe. On appelle le vecteur des multiplicateurs du simplexe associé à la base B, le vecteur $\pi \in \mathbb{R}^m$ donné par

$$\pi^{\mathrm{T}} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}.$$

Définition 1.13 — Base optimale. Une base réalisable B est dite optimale si la solution de base réalisable $x = [x_B\,; 0]^{\mathrm{T}}$ associée, est optimale (c-à-dire, pour laquelle la fonction coût est optimale).

Théorème 1.5 Soit $\pi \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des multiplicateurs du simplexe associé à la base B. Une condition nécessaire et suffisante pour que B soit une base réalisable optimale est que

$$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R = c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R \geq 0.$$

Preuve. *Il faut montrer que si B est une base réalisable et $\overline{c}_R \geq 0$, alors $x = [x_B\,; 0]^{\mathrm{T}}$ est optimal. Notons $A = [B\,; R]$ et $c = [c_B\,; c_R]^{\mathrm{T}}$, alors pour $y = [y_B\,; y_R]^{\mathrm{T}}$ quelconque de $\mathcal{P}$, on a*

$$A\,y = b \iff B\,y_B + R\,y_R = b \quad \textit{et} \quad Z(y) = c^{\mathrm{T}} y \iff Z(y) = c_B^{\mathrm{T}} y_B + c_R^{\mathrm{T}} y_R. \tag{1.3}$$

La première équivalence de (1.3) *implique que $y_B = B^{-1} b - B^{-1} R\, y_R$, et donc*

$$\begin{aligned} Z(y) = c^{\mathrm{T}} y &= c_B^{\mathrm{T}} \big(B^{-1} b - B^{-1} R\, y_R\big) + c_R^{\mathrm{T}} y_R \\ &= c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b + \big(c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R\big)\, y_R \\ &= c_B^{\mathrm{T}} x_B + \big(c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R\big)\, y_R \quad (\textit{car} \ \ x_B = B^{-1} b) \\ &= c^{\mathrm{T}} x + \big(c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R\big)\, y_R \quad (\textit{car} \ \ x_R = 0) \\ &= Z(x) + \big(c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R\big) y_R. \end{aligned}$$

Par suite, comme $\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R$*, on obtient*

$$Z(y) = Z(x) + \overline{c}_R^{\mathrm{T}} y_R. \tag{1.4}$$

Sachant que $y \geq 0$ *puisque* $y \in \mathcal{P}$*, la condition* $\overline{c}_R \geq 0$ *implique que* $Z(y) \geq Z(x)$ *pour tout* $y \in \mathcal{P}$*, et donc l'optimum* Z^* *de la fonction coût* Z *est atteint au point* $x = [x_B\,;0]^{\mathrm{T}} = [B^{-1}b\,;0]^{\mathrm{T}}$.

■

Exemple. — 2D. Reprenons le même exemple, la solution de base $x_2 = [2,2,0,0,-1]^T$ (associée à la base $B_2 = [A_1, A_2, A_5]$) n'est pas réalisable puisque on a

$$x_{B_2} = B_2^{-2} b = [2,2,-1]^T \ngeq 0.$$

Par suite, cette solution ne peut pas être optimale. Par contre, si on l'on choisit la base

$$B_3 = [A_1, A_2, A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sa matrice inverse est donnée par

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les variables de base étant les variables x_1, x_2 et z_2, alors le vecteur des coûts associés est

$$c_{B_3}^T = [-2,-1,0].$$

Par suite, on en déduit que

$$x_{B_3} = B_3^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

et

$$\overline{c}_R^T = c_R^T - c_{B_3}^T B_3^{-1} R = [0,0] - [-2,-1,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1,1] \geq 0.$$

La base B_3 est donc réalisable optimale, et la solution de base réalisable associée est optimale, soit

$$x^* = [x_{B_3}; 0]^T = [2,1,1,0,0] \qquad (Z^* = Z(X^*) = (-2) \times 2 - 1 = -5).$$

Théorème 1.6 — Fondamentale. Soit B une base réalisable quelconque, et $x^0 = [x_B^0\,;0]^{\mathrm{T}}$ la solution de base associée, qu'on suppose non-dégénérée. S'il existe un indice s d'une variable hors-base x_s tel que $\overline{c}_s = c_s^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} A_s < 0$. Alors

1. ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_s sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables et dans ce cas l'optimum de Z est non borné ($-\infty$).
2. Sinon, on peut construire une base réalisable $\tilde{B}$ et une solution de base réalisable $\tilde{x}$ tel que

$$Z(\tilde{x}) \leq Z(x).$$

Preuve. *Soient e_s est le $s^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n-m}$ et $A_s = Re_s$ le vecteur colonne de la matrice A correspondant à la variable hors-base x_s. Considérons*

$$\overline{b} = B^{-1}b \quad et \quad \overline{A}_s = B^{-1}A_s = B^{-1}Re_s.$$

Soit $\theta > 0$, on considère $x = \left[x_B = \overline{b} - \theta\overline{A}_s\,; x_R = \theta e_s\right]$. On distingue les deux cas suivants :

1. *Si $\overline{A}_s = B^{-1}A_s \leq 0$, alors pour tout $\theta > 0$, on a*

$$x_B = \overline{b} - \theta\overline{A}_s = x_B^0 - \theta\overline{A}_s \geq 0.$$

Il résulte de l'équation (1.4) que $Z(x) = Z(x^0) + \overline{c}_R^{\mathrm{T}} x_R$, et puisque

$$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} x_R = \theta\,\overline{c}_R^{\mathrm{T}} e_s = \theta\,(c_R^{\mathrm{T}} - \pi^T R)\,e_s = \theta\,(c_R^{\mathrm{T}} e_s - \pi^T R e_s) = \theta\,(c_s^{\mathrm{T}} - \pi^T A_s) = \theta\,\overline{c}_s,$$

on obtient $Z(x) = Z(x^0) + \theta\,\overline{c}_s$, et comme $\overline{c}_s < 0$, alors pour $\theta \to +\infty$, on obtient

$$Z(x) \to -\infty.$$

2. *Soit $\overline{A}_s = (\overline{a}_{1s}, \ldots, \overline{a}_{ms})^{\mathrm{T}}$, s'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\overline{a}_{is} > 0$, alors la plus grande valeur $\tilde{\theta}$ que peut prendre le réel $\theta > 0$ pour avoir $x_B = \overline{b} - \theta\overline{A}_s = (\overline{b}_i - \theta\,\overline{a}_{is})_{1\leq i\leq m} \geq 0$ est tel que*

$$\tilde{\theta} = \min_{i\in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \quad où \quad I_s^+ = \{i \in \{1, \ldots, m\}\,;\, \overline{a}_{is} > 0\}.$$

On conclut que $\tilde{x} = \left[\tilde{x}_B = \overline{b} - \tilde{\theta}\overline{A}_s\,; \tilde{x}_R = \tilde{\theta}\,e_s\right]^{\mathrm{T}}$ est une solution de base réalisable puisque

$$\tilde{x} \geq 0 \quad et \quad [B;R]\begin{bmatrix}\tilde{x}_B\\ \tilde{x}_R\end{bmatrix} = B\overline{b} - \tilde{\theta}\,B\overline{A}_s + \tilde{\theta}\,Re_s = BB^{-1}b - \tilde{\theta}\,BB^{-1}A_s + \tilde{\theta}\,A_s = b.$$

Soit $\tilde{B}$ la matrice obtenue de B en remplaçant la colonne B_r par la colonne B_s. Par conséquent, la sous-matrice $\tilde{B}$ (extraite de A) est une base réalisable vérifiant

$$Z(\tilde{x}) = Z(x^0) + \tilde{\theta}\,\overline{c}_s < Z(x^0) \quad (car\ \ \overline{c}_s < 0).$$

■

Remarque. 1. $x_s = 0$ dans la solution x^0, alors que $\tilde{x}_s > 0$ dans la solution $\tilde{x}$ (variable d'entrée).

2. $x_r > 0$ dans la solution x^0, alors que $\tilde{x}_r = \overline{b}_r - \tilde{\theta}\,\overline{a}_{rs} = 0$ dans la solution $\tilde{x}$ (variable de sortie).

1.3 Résolution des programmes linéaires

1.3.1 Résolution géométrique

Si le domaine $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, il est possible d'utiliser une méthode graphique afin de résoudre un problème de programmation linéaire en deux variables. Pour illustrer ceci, considérons l'exemple suivant

$$(PL)\ :\ \begin{cases} \max\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2} 2x + y \ \ (= -\min\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2} -2x - y) \\ x \leq 2, \\ y \leq 2, \\ x + y \leq 3, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

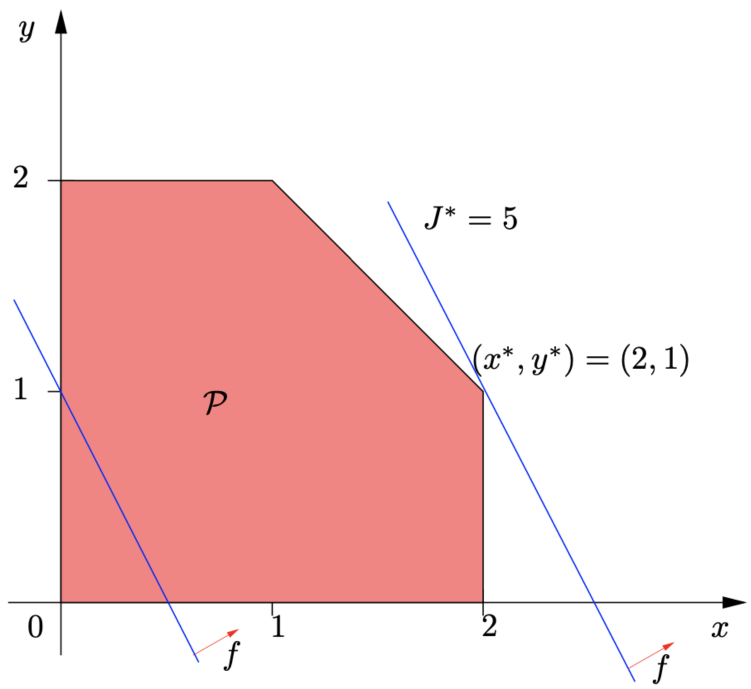


Figure 1.1: Domaine réalisable et solution optimale pour le programme (PL)

- Chaque contrainte d'inégalité est matérialisée par une droite délimitant deux demi-plans. Le domaine $\mathcal{P}$ des solutions réalisables est un polyèdre (ici un polytope puisque borné) formé de l'intersection de tous les demi-plans réalisables issus des contraintes du problème (PL). Il est pour ce cas représenté en couleur sur la figure ci-dessus.
- Les courbes des iso-coûts ou lignes de niveau $c^T x = k$ pour $k \in \mathbb{R}$ sont les droites en bleu dont le gradient est représenté par le vecteur $f = c$. L'ensemble des solutions réalisables pour lesquelles la fonction coût vaut k est l'intersection du polytope $\mathcal{P}$ avec la droite $c^T x = k$.
- La solution optimale $(x^*, y^*) = (2, 1)$ est obtenue en choisissant la ligne de niveau dont le coût est maximal et qui a une intersection non vide avec $\mathcal{P}$. On obtient le coût optimal $J^* = 5$ pour l'intersection de la ligne de niveau avec un des sommets du polytope.

1.3.2 Algorithme du simplexe

Le but de l'algorithme du simplexe est de calculer la solution optimale d'un programme linéaire et dont donner sa valeur optimale correspondante, et ceci à partir d'une base réalisable donnée de ce programme.

On peut prendre n'importe quelle base réalisable comme base de départ . Mais en pratique, il n'est pas toujours facile de mettre en évidence une telle base (par exemple, lorsqu'il y a des contraintes d'égalité), et on s'arrange toujours pour avoir une matrice unité dans le problème initial par l'introduction de variables supplémentaire : variables d'écart ou variables artificielles. Le schema général de l'algorithme du simplexe est donné comme suit :

1. Trouver une base réalisable de départ B $(\overline{b} = B^{-1} b = x_B \geq 0)$,
2. Calculer B^{-1}, $\pi^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$, $\overline{b} = B^{-1} b$, et les coûts réduits associés aux variables hors base
$$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R.$$

(a) Si $\overline{c}_R^{\mathrm{T}} \geq 0$, l'optimum est atteint. **Fin.**

(b) Sinon, il existe s indice d'une variable x_s hors-base tel que $\overline{c}_s < 0$. Calculer

$$\overline{A}_s = B^{-1}A_s \quad \text{où} \quad A_s \text{ est la } s^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

i. Si $\overline{A}_s = (\overline{a}_{is})_{1\leq i\leq m} \leq 0$, alors pas d'optimum fini $(\min\limits_{x\in\mathcal{P}} c^T x = -\infty)$. **Fin.**

ii. Sinon, il existe $i \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $\overline{a}_{is} > 0$. Calculer

$$\min_{i\in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \quad \text{où} \quad I_s^+ = \{i \in \{1,\ldots,m\}\,;\, \overline{a}_{is} > 0\}.$$

iii. Former $\tilde{B}$ en faisant sortir la colonne B_r de la base B et entrer la colonne A_s.

iv. Prendre $B = \tilde{B}$ comme base réalisable de départ.

Retourner l'algorithme.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme du simplexe converge en un nombre fini de bases réalisables (nombre fini de points extrêmaux) et la décroissance de la fonction coût interdit de passer deux fois par la même base (même point extrêmal) et donc l'algorithme atteint le point optimum. Mais dans le cas de dégénérescence il est possible d'effectuer une suite d'itérations sans que la valeur de la fonction objectif change. Dans de tels cas le risque de tourner en rond existe : c'est la possibilité de cyclage.

Remarque. — Choix de s tel que $\overline{c}_s < 0$. Pour le test $\overline{c}_s < 0$, choisir l'indice s

- le plus petit tel que $\overline{c}_s < 0$,

  et/ou

- tel que $\overline{c}_s = \min\limits_{\overline{c}_j<0} \overline{c}_j$.

Remarque. — Règle de Bland. S'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent sortir de la base, alors on choisit celle qui a le plus petit indice r.

Remarque. — Matrice de changement de Base. Les deux bases B et $\tilde{B}$ sont adjacentes (c-à-dire ne diffèrent que par une colonne), alors il est facile de calculer $\tilde{B}^{-1}$ à partir de B^{-1} en multipliant celle-ci par la matrice de changement de base P suivante.

$$P = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{\overline{a}_{1s}}{\overline{a}_{rs}} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \ddots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{\overline{a}_{rs}} & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & 0 & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & -\frac{\overline{a}_{ms}}{\overline{a}_{rs}} & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{colonne } r\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad \text{ligne } r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

La matrice P est obtenue à partir de la matrice unité I_m, en substituant la colonne r par le colonne

$$V = (v_1, \ldots, v_m)^{\mathrm{T}} \quad \text{définit par} \quad \begin{cases} v_i = -\dfrac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{rs}} & \text{si} \quad i \neq r \\ v_r = \dfrac{1}{\overline{a}_{rs}} & \text{sinon} . \end{cases}$$

Lorsque $B_0 = I$, après un certain nombre de changement de base $B_0 \to B_1 \to \cdots \to B_q$ dont les matrices de changement de base correspondantes sont $P_1, P_2, \ldots, P_q$ respectivement, alors on aura

$$B_1^{-1} = P_1 B_0^{-1} \ , \ \ B_2^{-1} = P_2 B_1^{-1}, \ldots, B_q^{-1} = P_q B_{q-1}^{-1}.$$

Par conséquent, on en obtient que

$$B_q^{-1} = P_q P_{q-1} \ldots P_1 B_0 = P_q P_{q-1} \ldots P_1.$$

Remarque. — Base de départ : variables artificielles. Soit (PL) le programme linéaire avec contraintes d'égalités et sous forme standard suivant.

$$(\mathrm{PL}) \ : \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Souvent, on commence l'algorithme de simplexe au sommet $(0,0,0)$ qui appartient à l'ensemble de solutions de base réalisable. Pour le problème (PL), l'origine $(0,0,0)$ ne peut pas appartenir à l'ensemble de solutions de base réalisable (car sinon, les deux contraintes donnent en ce point $0 = 3$ et $0 = -4$). Pour contourner ceci, on ajoute deux variables y_1 et y_2, dites artficielles avec un coût $M > 0$ assez grand (c-à-dire M est le coefficient des variables artificielles y_1 et y_2 dans la fonction coût). Après insertion de ces variables, (PL) devient

$$(\mathrm{PL}') \ : \begin{cases} \min z' = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + M y_1 + M y_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - y_2 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

- La base de départ B_0 de variables (y_1, y_2) est réalisable puisque

$$x_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Alors, la solution de base réalisable associé à B_0 est

$$[y_1, y_2, x_1, x_2, x_3]^T = [3,4,0,0,0]^T.$$

- La condition $M > 0$ assez grand, garantit que l'on aura $y_1 = y_2 = 0$ à l'optimum (si (PL) admet des solutions) et la solution optimale de (PL') est alors solution optimale de (PL).

Remarque. — Base de départ : variables d'écarts et variables artificielles. Soit (PL) le programme linéaire avec contraintes d'inégalités ≤ 0 suivant.

$$(\mathrm{PL}) \ : \ \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Pour écrire (PL) sous forme standard, on ajoute deux variables d'écarts $x_3 \geq 0$ et $x_4 \geq 0$, alors

$$(\mathrm{PL}) \ : \ \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Pour initier l'algorithme à l'origine $(0,0)$ (la seconde contrainte donne $x_4 = -4$), on introduit une variable artificielle x_5 dans la seconde contraintes avec un coût $M > 0$ assez grand. On obtient

$$(\mathrm{PL}') \ : \ \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 + Mx_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

La base de départ B_0 de variables (x_3, x_5) est réalisable puisque

$$x_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Alors, la solution de base réalisable associé à B_0 est

$$[x_3, x_5, x_1, x_2, x_4]^T = [3, 4, 0, 0, 0]^T.$$

Nécessairement, $x_5 = 0$ à l'optimum, et la solution optimale pour (PL') est optimale pour (PL).

Remarque. — Forme canonique et tableau de l'algorithme (primal) du simplexe. Soit

$$(\mathrm{PL}) \ : \ \begin{cases} \min z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = c^{\mathrm{T}} x \\ a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Ce programme linéaire peut écrire sous la forme matricielle suivante

$$(\mathrm{PL}) \ : \ \begin{cases} \min z \\ Ax = b \\ c^{\mathrm{T}} x - z = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Pour faciliter la présentation, supposons que la base choisie B est composée des m premières colonnes de A. Par conséquent, on peut écrire

$$A = \left[B\,;R\right]\ ,\ \ x = [x_B\,;x_R]^{\mathrm{T}}\ \text{ avec }\ x_B = [x_1,\ldots,x_m]^{\mathrm{T}}\ ,\ \ c = [c_B\,;c_R]^{\mathrm{T}}.$$

Par suite, le programme linéaire (PL) s'écrit

$$(\mathrm{PL})\ :\ \begin{cases} \min z \\ B x_B + R x_R = b \\ c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\ x_B, x_R \geq 0. \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{PL})\ :\ \begin{cases} \min z \\ \left[B\,;R\right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b \\ [c_B^{\mathrm{T}}\,;c_R^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\ x_B, x_R \geq 0. \end{cases}$$

Puisque la relation $c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b &= c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b - z \\ &= c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \left(B x_B + R x_R\right) - z \\ &= c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} B x_B - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R x_R - z \\ &= c_B^{\mathrm{T}} x_B - c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R x_R - z \\ &= (c_B^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}}) x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R) x_R - z = 0 x_B + \overline{c}_R^{\mathrm{T}} x_R - z. \end{aligned}$$

D'où

$$0 x_B + \overline{c}_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R) x_R - z = -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b.$$

Par conséquent, le programme linéaire (PL) devient

$$(\mathrm{PL})\ :\ \begin{cases} \min z \\ I x_B + B^{-1} R x_R = B^{-1} b \\ 0 \cdot x_B + \left[c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R\right] x_R - z = -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b \\ x_B, x_R \geq 0. \end{cases}$$

Le problème linéaire (PL) peut être présenter sous forme du tableau suivant.

Variables de base	$x_B^{\mathrm{T}} = [x_1,\ldots,x_m]$	x_R^{T}	- z	Terme de droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b = \overline{b}$
$-z$	0	$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R$	1	$-c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b = -c_B^{\mathrm{T}} \overline{b}$

Définition 1.14 Un programme linéaire est mis sous forme canonique par rapport aux variables de base $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$ si z est exprimé en fonction des variables hors base, et si les colonnes de A correspondantes aux $(x_{ij})_{1\leq j\leq m}$ forment une matrice unité (à une permutation près).

Remarque. En comparant les $\overline{c}_s$ (si $\overline{c}_s < 0$), on passe à l'étape suivante en multipliant le nouveau tableau par la matrice de changement de base P.

Exemple. Résolvons le programme linéaire (de maximisation) (PL) suivant

$$\begin{cases} \max\ \omega = x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{équivant (en posant } \omega = -z) \quad \begin{cases} \min\ z = -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Puis, après l'ajout de variables d'écart, on obtient le problème équivalent suivant

$$\begin{cases} \min\ z \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 - z = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Tableau initial :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad c = \begin{bmatrix} c_{x_1} = -1 \\ c_{x_2} = -2 \\ c_{x_3} = 0 \\ c_{x_4} = 0 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad R_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad c_{B_1} = \begin{bmatrix} c_{x_3} = 0 \\ c_{x_4} = 0 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad c_{R_1} = \begin{bmatrix} c_{x_1} = -1 \\ c_{x_2} = -2 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de $B_1^{-1} = I$ est triviale et il en résulte que

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_1}^{\mathrm{T}} B_1^{-1} = (0,0,0) \quad ; \quad \bar{c}_{R_1}^{\mathrm{T}} = c_{R_1}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_1 = c_{R_1}^{\mathrm{T}} = [c_{x_1} = -1 \,;\, c_{x_2} = -2] \not\geq 0.$$

Par suite, la première base $B_1 = I$ n'est pas optimale. Le tableau initial (T_1) est comme suit :

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_3	1	0	0	-3	$\boxed{2}$	0	2
x_4	0	1	0	-1	2	0	4
x_5	0	0	1	1	1	0	5
$-z$	0	0	0	-1	$\boxed{-2}$	1	$-c_{B_1}^T \bar{b} = 0$

$$z_{B_1} = c_{B_1}^{\mathrm{T}} \bar{b} = [0,0,0] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0.$$

On a $\overline{c}_{R_1}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_1} = -1\,; \overline{c}_{x_2} = -2]$, on choisit l'indice s hors-base tel que $\overline{c}_s < 0$ avec $\overline{c}_s$ le plus petit des coordonnées de $\overline{c}_R$, d'où $s = 2$ et $\overline{c}_2 = \overline{c}_{x_2} = \boxed{-2} < 0$, et donc x_2 entre dans la base B_1 (la variable associée au second colonne de A). Alors, on a

$$A_{s=2} = A_{x_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; \overline{A}_{s=2} = \overline{A}_{x_2} = B_1^{-1} A_{s=2} = A_{s=2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \overline{b} = B_1^{-1} b = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

et comme $I_{s=2}^{+} = \{i \in \{1, \ldots, 3\}\,; \overline{a}_{is} > 0\} = \{1, 2, 3\}$, alors

$$\min_{i \in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \min\{2/2\,; 4/2\,; 5/1\} = 1 = \frac{\overline{b}_1}{\overline{a}_{1s}}.$$

Alors, $r = 1$, $\overline{a}_{rs} = \overline{a}_{12} = \boxed{2}$ le pivot, et x_3 sort de la base B_1 (variable associé à 1er colonne de B).

Construction de la base $\mathbf{B_2}$:

On remplace la 1re colonne de B_1 (associée à la variable sortante x_3) par le colonne

$$A_s = A_2 = [2, 2, 1]^{\mathrm{T}} \text{ (correspondante à la variable entrante } x_2\text{)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \;;\; R_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \;;\; c_{B_2} = \begin{bmatrix} c_{x_2} = -2 \\ c_{x_4} = 0 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \;;\; c_{R_2} = \begin{bmatrix} c_{x_1} = -1 \\ c_{x_3} = 0 \end{bmatrix} \;;\; \overline{a}_{12} = 2.$$

Soit P_1 la matrice de changement de base $B_1 \to B_2$ donnée par

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{a}_{12}} = \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{a}_{22}}{\overline{a}_{12}} = -1 & 1 & 0 \\ -\frac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{12}} = -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme $B_2^{-1} = P_1 B_1^{-1}$, alors on en déduit

$$B_2^{-1} = P_1 B_1^{-1} = P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_2}^{\mathrm{T}} B_2^{-1} = [-2, 0, 0] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1, 0, 0]$$

$$\overline{c}_{R_2}^{\mathrm{T}} = c_{R_2}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_2 = [-1, 0] - [-1, 0, 0] \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\overline{c}_{x_1} = -4, \overline{c}_{x_3} = 1].$$

Par conséquent, comme $\overline{c}_{R_2}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_1} = -4\,; \overline{c}_{x_3} = 1] \ngeq 0$, alors la base B_2 n'est pas optimale.

Pour obtenir le tableau (T_2), on multiplie R_1 et $\overline{b} = b$ du tableau (T_1) par la matrice P_1, alors

$$P_1 R_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B_2^{-1} b = P_1 b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_2	$1/2$	0	0	$-3/2$	1	0	1
x_4	-1	1	0	$\boxed{2}$	0	0	2
x_5	$-1/2$	0	1	$5/2$	0	0	4
$-z$	1	0	0	$\boxed{-4}$	0	1	$-c_{B_2}^T \overline{b} = 2$

$$z_{B_2} = c_{B_2}^{\mathrm{T}} \overline{b} = [-2, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2.$$

On a $s = 1$ puisque $\overline{c}_s = \overline{c}_{x_1} = -4 < 0$, et donc x_1 entre en base (variable associée à A_1). D'où

$$A_{s=1} = A_{x_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{A}_{s=1} = \overline{A}_{x_1} = B_2^{-1} A_{s=1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, on a $I_{s=1}^{+} = \{i \in \{1, \ldots, 3\}\,; \overline{a}_{is} > 0\} = \{2, 3\}$, et alors

$$\min_{i \in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \min\left\{\frac{2}{2}; \frac{4}{5/2}\right\} = 1 = \frac{\overline{b}_2}{\overline{a}_{2s}}.$$

Alors, $r = 2$, $\overline{a}_{rs} = \overline{a}_{21} = \boxed{2}$ le pivot et x_4 sort de la base B_2 (associée à la $2^{\text{ème}}$ colonne de B_2).

Construction de la base B_3 :

On remplace la $2^{\text{ème}}$ colonne de la base B_2 (associée à la variable sortante x_4) par la 1^{re} colonne de la matrice A, soit $A_1 = [-3, -1, 1]^{\mathrm{T}}$ (correspondante à la variable entrante x_1). Par suite, on obtient

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; R_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; c_{B_3} = \begin{bmatrix} c_{x_2} = 0 \\ c_{x_1} = -4 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \; ; \; c_{R_3} = \begin{bmatrix} c_{x_3} = 1 \\ c_{x_4} = 0 \end{bmatrix}$$

Soit P_2 la matrice de changement de base $B_2 \to B_3$, alors

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\overline{a}_{11}}{\overline{a}_{21}} = \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a}_{21}} = \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{21}} = -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $B_3^{-1} = P_2 B_2^{-1} = P_2 P_1 B_1^{-1} = P_2 P_1$, alors il en résulte que

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_3}^{\mathrm{T}} B_3^{-1} = (0, -4, 0) \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} = [2, -2, 0].$$

$$\overline{c}_{R_3}^{\mathrm{T}} = c_{R_3}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_3 = [1, 0] - [2, -2, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [1, 0] - [2, -2] = [-1, 2].$$

Comme $\overline{c}_{R_3}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_3} = -1; \overline{c}_{x_4} = 2)] \ngeq 0$, alors la base B_3 n'est pas optimale.

Pour obtenir le tableau (T_3), on multiplie R_2 et $\overline{b}$ de (T_2) par la matrice P_2, et on obtient

$$P_2 R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_2 \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_2	$-1/4$	$3/4$	0	0	1	0	$5/2$
x_1	$-1/2$	$1/2$	0	1	0	0	1
x_5	$\boxed{3/4}$	$-5/4$	1	0	0	0	$3/2$
$-z$	$\boxed{-1}$	2	0	0	0	1	6

$$z_{B_3} = c_{B_3}^{\mathrm{T}} \overline{b} = [-2, -1, 0] \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = -6.$$

On a $s = 3$ car $\overline{c}_{s=3} = c_{x_3} = -1 < 0$, et donc la variable x_3 entre en base (associée à la $3^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A). Par suite, il vient que

$$A_{s=3} = A_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{A}_{s=3} = B_3^{-1} A_{x_3} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, on a $I_{s=3}^{+} = \{i \in \{1, 2, 3\}\,;\, \overline{a}_{is} > 0\} = \{3\}$, et alors

$$\min_{i \in I_3^{+}} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i3}} \;;\; \overline{a}_{i1} > 0 \right\} = \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_{33}} = \frac{3/2}{3/4} = 2.$$

d'où $r = 3$, le pivot est $\overline{a}_{rs} = \overline{a}_{33} = 3/4$, et la variable x_5 sort de la base (c'est la variable correspondente à la $3^{\text{ème}}$ colonne de la base B_3).

Construction de la base B_4 :

On remplace la $3^{\text{ème}}$ $(r=3)$ colonne de la base B_3 par la $3^{\text{ème}}$ $(s=3)$ colonne de la matrice A, alors

$$B_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \quad R_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_5 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \quad c_{B_4} = \begin{bmatrix} c_{x_2}=0 \\ c_{x_1}=0 \\ c_{x_3}=-1 \end{bmatrix} \; ; \quad c_{R_4} = \begin{bmatrix} c_{x_5}=0 \\ c_{x_4}=2 \end{bmatrix}$$

Soit P_3 matrice de changement de base $B_3 \to B_4$, alors on a

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{33}} = \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{33}} = \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{a}_{33}} = \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Par suite, comme $B_4^{-1} = P_3\,P_2\,P_1\,B_1^{-1} = P_3\,(P_2\,P_1)$, alors on en déduit que

$$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & -5/4 & 4/3 \end{bmatrix},$$

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_4}^{\mathrm{T}}\,B_4^{-1} = [0,0,-1] \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & -5/4 & 4/3 \end{bmatrix} = [-1,5/3,-4/3]$$

$$\bar{c}_{R_4}^{\mathrm{T}} = c_{R_4}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_4 = [0,2] - [-1,5/3,-4/3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,2] - [-4/3,5/3]$$

On obtient alors l'arrêt de l'algorithme, puisque on a

$$\bar{c}_{R_4}^{\mathrm{T}} = [\bar{c}_{x_5} = 4/3, \bar{c}_{x_4} = 1/3] > 0.$$

Pour obtenir le tableau (T_4), on multiplie R_3 et $\bar{b}$ du tableau (T_3) par P_3, et donc

$$P_3 R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = P_3\,b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finalement, le tableau (T_4) est comme suit

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_2	0	$1/3$	$1/3$	0	1	0	3
x_1	0	$-1/3$	$2/3$	1	0	0	2
x_3	1	$-5/3$	$4/3$	0	0	0	2
$-z$	0	$1/3$	$4/3$	0	0	1	$-c_{B_4}^{\mathrm{T}}\,\overline{b} = 8$

$$z_{B_4} = c_{B_4}^{\mathrm{T}}\,\overline{b} = \left[-2,-1,0\right]\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix} = -8$$

En conclusion, on obtient

$$x^{opt} = (x_1 = 2\,,x_2 = 3\,,x_3 = 2\,,x_4 = 0\,,x_5 = 0) \quad \text{et} \quad z^{opt} = -x_1 - 2x_2 = -8.$$

Ce qui donne

$$\boxed{z^{opt} = -8 \quad \text{et} \quad w^{opt} = -z^{opt} = 8.}$$

1.3.3 Pratique de l'algorithme du simplexe

Méthode du simplexe Phase II : La Phase I qui sert plus à initialiser la Phase II, sera aborder plus tard. Cette phase s'applique à des problèmes du type

$$\begin{cases} \min\, c^{\mathrm{T}}x \\ A\,x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \max\, c^{\mathrm{T}}x \\ A\,x \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

On suppose que $b \geq 0$. Pour la Phase II, cette hypothèse garantie que

$$0 \in K = \left\{x \geq 0\,;\; Ax \leq b\right\}.$$

Le point 0 est un sommet, qui servira de point de départ de l'algorithme du simplexe. Puis, l'algorithme va pivoter autour de ce point pour trouver un meilleur sommet, et on poursuit l'algorithme jusqu'à l'obtention de la solution optimale. Illustrons cette méthode sur l'exemple

$$\begin{cases} \max\, z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.}\;\; 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ \qquad x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ \qquad x_1,\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Introduisons les variables d'écarts, on obtient

$$\begin{cases} \max\, z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.}\;\; 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \qquad x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Le tableau initial est comme suit

Variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Terme de droite	Critère
x_3	2	1	1	0	2	$2 \div 1 = 2$
x_4	1	$\boxed{3}$	0	1	3	$3 \div 3 = 1$
	1	2	0	0	0	

En cas d'un problème de maximisation (resp. minimisation), la variable entrante est donné par

$$\boxed{c_s = \max\left\{c_i\,;\;\; c_i > 0\right\}} \quad \left(\text{resp. } \boxed{c_s = \min\left\{c_i\,;\;\; c_i < 0\right\}}\right).$$

D'où x_2 est une variable entrante. La variable sortante est donné par

$$\boxed{\frac{b_r}{a_{sr}} = \min\left\{\frac{b_k}{a_{kr}}\,;\;\; a_{ks} > 0\right\}}.$$

D'où x_4 est une variable sortante. Maintenant, on procède à élimination de Gauss-Jordan autour du pivot a_{rs}. La ligne L_k du tableau du simplexe (à cette itération) est modifiée par la relation

$$L_r \leftarrow \frac{L_r}{a_{rs}} \quad \text{et} \quad L_k \leftarrow L_k - a_{ks}\frac{L_r}{a_{rs}} \quad \text{si} \quad k \neq r.$$

Le tableau suivant est comme suit

Variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Terme de droite	Critère
x_3	$\boxed{5/3}$	0	1	$-1/3$	1	$1 \div (5/3) = 3/5$
x_2	$1/3$	1	0	$1/3$	1	$1 \div (1/3) = 3$
	$1/3$	0	0	$-2/3$	-2	

La variable entrante est x_1 et la sortante est x_3. Après pivotement, le tableau suivant est comme suit

Variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Terme de droite	Critère
x_1	1	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$	
x_2	0	1	$-1/5$	$2/5$	$4/5$	
	0	0	$-1/5$	$-9/15$	$-11/5$	

L'algorithme s'arrête ici car les coefficients coût c_i (à cet itération) sont négative. La solution optimale est $\left(x_1 = 3/5, x_2 = 4/5, x_3 = 0, x_4 = 0\right)$, et la valeur optimale de ce programme est $z = \dfrac{11}{5}$.

Exemple. Considérons le problème ci-dessous

$$\begin{cases} \max\, z = 20x_1 + 25x_2 \\ \text{s.c.}\;\; 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ \qquad\; 4x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ \qquad\; x_1,\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Au préalable, on écrit le problème sous la forme

$$\max z = 20x_1 + 25x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 48 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Le tableau initial est comme suit.

Variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Terme de droite	Critère
x_3	2	3	1	0	40	$40 \div 3 = 40/3$
x_4	4	2	0	1	48	$48 \div 2 = 24$
	20	25	0	0	0	

Les variables de base sont $\{x_3, x_4\}$ et la solution de base est $(0,0,40,48)$, ce qui correspond à l'origine dans le plan. La colonne $j = 2$ est colonne de pivot, et donc la variable x_2 entre dans la base mais une variable doit sortir. Le critère assure que la ligne de pivot sera $i = 1$, et donc la variable sortante x_3. Les variables de base deviennent $B = \{x_2, x_4\}$. Puis, en pivotant autour du pivot a_{12}, il vient

Variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Terme de droite	Critère
x_2	$2/3$	1	$1/3$	0	$40/3$	$40/3 \div 2/3 = 20$
x_4	$8/3$	0	$-2/3$	1	$64/3$	$64/3 \div 8/3 = 8$
	$10/3$	0	$-25/3$	0	$-1000/3$	

La colonne de pivot est $j = 1$ et la ligne de pivot est $i = 2$. En pivotant autour du pivot a_{12}, il vient

Variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Terme de droite
x_2	0	1	$1/2$	$-1/4$	8
x_1	1	0	$-1/4$	$3/8$	8
	0	0	$-15/2$	$-5/4$	-360

L'algorithme s'arrête ici car tous les coefficients coût sont négatifs. La solution optimale sera

$$x_1 = 8,\ x_2 = 8,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \ \text{ et } \ z = 360.$$

Ce qui correspond au sommet $(8,8)$ dans le plan. Le signe $-$ dans le coin inférieur droit est dû au fait que l'on avait initialement ajouté la ligne $c^T x - z = 0$, et donc, à la fin, on aura $-z = -360$.

Exemple. Considérons le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \min z = 3x_1 - 6x_2 \\ \text{s.c. } x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ \quad 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ \quad x_1 - x_2 \geq -1 \\ \quad x_1 - 4x_2 \geq -13 \\ \quad -4x_1 + x_2 \geq -23 \\ \quad x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ce programme peut se reformule sous la forme équivalente suivante

$$\begin{cases} \min z = 3x_1 - 6x_2 \\ \text{s.c. } -x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ \quad -2x_1 - x_2 \leq 0 \\ \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ \quad -x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ \quad 4x_1 - x_2 \leq 23 \\ \quad x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ajoutons les variables d'écart, on trouve

$$\begin{cases} \min z = 3x_1 - 6x_2 \\ \text{s.c. } -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ \quad -x_1 + 4x_2 + x_6 = 13 \\ \quad 4x_1 - x_2 + x_7 = 23 \\ \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Le tableau initial s'écrit

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 23 \\ 3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La colonne de pivot est $j = 2$ et la ligne de pivot est $i = 3$. On pivote autour de ce pivot.

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_7 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

La colonne de pivot est $j=1$ et la ligne de pivot est $i=4$. On pivote autour de ce pivot.

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_7 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4/3 & 1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

L'algorithme se termine à cette étape car tous les c_i sont positifs. La solution optimale sera

$$x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 12,\ x_4 = 10,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 15 \text{ et } z = -15.$$

Exemple. — Un cas de solution non borné. Soit le problème

$$\begin{cases} \min z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.c. } -x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \\ \qquad x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ \qquad -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

On ajoute les variables d'écart, on obtient

$$\begin{cases} \min z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.c. } -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \qquad x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ \qquad -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Le tableau initial s'écrit comme suit

$$\begin{array}{c} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La colonne de pivot est $j=2$ et la ligne de pivot est $i=3$. On pivote autour de ce pivot.

$$\begin{array}{c} x_4 \\ x_5 \\ x_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

La colonne de pivot est $j=1$. Toutefois, le critère du quotient ne s'applique plus car toutes les entrées (lignes 1 à 3) de la colonne 2 sont négatives ou nulles. Analysons cette situation en écrivant les équations correspondantes du tableau

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ 3x_3 + x_5 + x_6 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 1. \end{cases}$$

La dernière base était $B = \{x_4, x_5, x_2\}$. On voulait faire entrer dans la base la variable x_1. Posons les autres variables $x_3 = x_6 = 0$ dans le système ci-dessus, on trouve

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 = 4 \\ x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} x_4 = 4 + 2x_1 \geq 0 \\ x_5 = 5 \geq 0 \\ x_2 = 1 + x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Donc nous obtenons une famille de solutions admissibles qui dépend de la variables $x_1 \geq 0$. Reportons dans la fonction objective (voir la dernière ligne du tableau), on obtient

$$z = -3 - 5x_1 + 7x_3 + 3x_6.$$

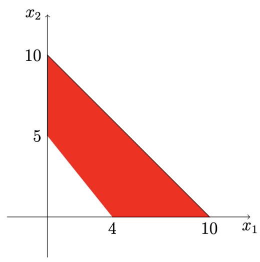
Or $x_3 = x_6 = 0$, alors $z = -3 - 5x_1$, et donc pour $x_1 \to +\infty$, on obtient $z \to -\infty$. Donc le problème est non borné inférieurement et de ce fait n'admet pas de solution optimale.

Méthode du simplexe à deux phase : La méthode du simplexe phase II, exige la connaissance d'une solution de base admissible. Ce qui est le cas pour le problème

$$\begin{cases} \max z = c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.c. } Ax \leq b \qquad \text{avec l'hypothèse} \quad b \geq 0. \\ \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 \leq 10 \\ \quad 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ \quad x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$



On transforme ce problème sous la forme standard $Ax \leq b$, et on ajoute les variables d'écart, alors

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ \quad -5x_1 - 4x_2 + x_4 = -20 \qquad \text{(hypothèse } b \geq 0 \text{ non satisfaite)} \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Clairement l'origine $(0,0)$, c-à-dire le point $(0,0,10,-20)$, n'est pas admissible . L'objectif est de trouver une solution de base admissible qui servira de point de départ pour l'algorithme du simplexe. L'idée est de résoudre un problème intermédiaire de minimisation, dit Phase I du simplexe, dont la solution fournira le point de départ de la méthode du simplexe.

Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit d'introduire une variable artificielle x_0 (au problème $Ax \leq b$), et de considérer le problème de minimisation

$$\begin{cases} \min z = x_0 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 - x_0 \leq 10 \\ \quad -5x_1 - 4x_2 - x_0 \leq -20 \\ \quad x_1, x_2, x_0 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème admet toujours une solution admissible, il suffit de prendre le point

$$(x_1, x_2, x_0) = (0, 0, 20).$$

Retournons au cas général

$$\begin{cases} \max z = c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

avec aucune restriction sur le vecteur b. Soit $e = (1, .., 1)^{\mathrm{T}}$. La Phase I consiste à résoudre le problème de minimisation, par rapport aux variables $(x, x_0) = (x_1, .., x_n, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, suivant

$$\begin{cases} \min z = x_0 \\ \text{s.c. } Ax - x_0 e \leq b \\ \qquad x, x_0 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

La Phase I admet toujours une solution admissible, il suffit de choisir $x_0 \geq 0$ suffisamment grand de sorte que $-b \leq x_0 e$, soit encore $-b_i \leq x_0$ pour tout $i = 1, 2, .., m$. Ajoutons les variables d'écart à la Phase I dans le vecteur x, obtient

$$\begin{cases} \min z = x_0 \\ \text{s.c. } \tilde{A}x - x_0 e = b \\ \qquad x, x_0 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^{m+n}) \end{cases} \tag{1.5}$$

où $\tilde{A} = [A, \mathrm{I}_m]$ est obtenue en ajoutant à A, la matrice identité I_m. On a

Théorème 1.7 L'ensemble $K = \left\{x \geq 0;\ \tilde{A}x = b\right\}$ est non vide, si et seulement si le point $(x, 0) \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ est solution optimale du problème 1.5 de la Phase I.

Preuve. *Soit $x \in K$, alors il vérifie $\tilde{A}x = b$, et donc le point (x, x_0) avec $x_0 = 0$ vérifie*

$$\tilde{A}x - x_0 e = \tilde{A}x = b.$$

De plus, c'est clairement une solution optimale du problème 1.5 puisque

$$z = x_0 \geq 0.$$

Réciproquement, si $(x, x_0 = 0)$ est solution du problème 1.5, alors il vérifie

$$\tilde{A}x - x_0 e = b.$$

Il en résulte ainsi que $\tilde{A}x = b$, et donc $x \in K$.

■

Description de la Phase I : elle s'applique s'il existe un $b_i < 0$, et dans ce cas, il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} \min z = x_0 \\ \text{s.c. } \tilde{A}x - x_0 e = b \\ \qquad x, x_0 \geq 0 \end{cases}$$

Étape 1 : On forme le tableau initial comme dans la méthode du simplexe

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & -e & b \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'avant-dernière colonne $(-e,1)^{\mathrm{T}} = (-1,-1,..,-1,1)$ est liée à l'ajout de la variable x_0. Le dernier chiffre 1 correspond à la fonction objective $z = x_0$.

Étape 2 : Il faut choisir un point de départ pour démarrer le simplexe. On observe que le point $(x,x_0) = (0,-b)$ n'est pas admissible en général, c-à-dire s'il y a un $b_i > 0$. On choisit la ligne i qui correspond au minimum de l'ensemble

$$\{b_j ;\ \ j = 1,2,..,m\}.$$

On prend comme variables de base $B = \{x_{n+1},x_{n+2},..,x_{n+i-1},x_{n+i+1},,,,x_{n+m},x_0\}$. Il y aura toujours m variables de base. À cause du coefficient -1 pour l'élément de pivot associé à la variable x_0, on doit effectuer une opération spéciale de pivotement autour du pivot

$$a_{i,n+m+1} = -1.$$

Étape 3 : On poursuit avec la méthode du simplexe de la manière habituelle.

Étape 4 : Si la valeur minimale de $z = x_0 \neq 0$, le problème initial n'admet pas de solution admissible. Par contre, si $z = x_0 = 0$, nous obtenons une solution admissible de base qui ne contient pas la variable x_0. Il faut passer maintenant à la Phase II. Pour cela, on modifie la dernière ligne par les coefficients de la fonction objective $z = c^{\mathrm{T}} x$. Afin de poursuivre le simplexe, il faut au préalable pivoter les coefficients correspondants à ceux de la base.

Exemple : reprenons l'exemple du début en incorporant les variables d'écart et artificielle

$$\begin{cases} \max z = x_0 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 + x_3 - x_0 = 10 \\ \qquad -5x_1 - 4x_2 + x_4 - x_0 = -20 \\ \qquad\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_0 \geq 0. \end{cases}$$

On forme le tableau initial du simplexe pour ce problème.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_0 & \end{array} \\ \begin{array}{c} x_3 \\ x_0 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 10 \\ -5 & -4 & 0 & 1 & \boxed{-1} & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x_{n+i} = x_{2+2} = x_4.$$

Nous allons choisir les variables de base $\{x_3,x_0\}$ afin de trouver une solution de base. Pour cela, il faut faire, en premier, une opération spéciale de pivotement autour du pivot $a_{25} = -1$. On obtient

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & -1 & 0 & 30 \\ \boxed{5} & 4 & 0 & -1 & 1 & 20 \\ -5 & -4 & 0 & 1 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Poursuivons avec la méthode simplexe standard. La colonne et la ligne de pivot sont $j = 1$ et $i = 2$.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_3 \\ x_1 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1 & 1/5 & -6/5 & 6 \\ 1 & 4/5 & 0 & -1/5 & 1/5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

On ne peut améliorer ce résultat car la fonction objective $z = x_0 = 0$. Donc, selon le théorème 1.7, la solution optimale du problème de la Phase I est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_0) = (4, 0, 6, 0, 0) \text{ avec la base } \{x_1, x_3\}.$$

De plus, la variable $x_0 = 0$ devient inutile car hors-base. Ainsi, on peut enlever la colonne correspondante à x_0. En résumé, nous avons obtenu une solution de base admissible

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 6, 0) \quad \text{(c'est le sommet } (4,0) \text{ de la figure).}$$

Introduisons cette solution dans le tableau du simplexe de la Phase II. Pour cela, on modifie la dernière ligne du tableau final de la Phase I par la ligne des coefficients originaux de la fonction objective.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \begin{array}{c} x_3 \\ x_1 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1 & 1/5 & 6 \\ 1 & 4/5 & 0 & -1/5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les colonnes de pivot sont x_1 et x_3, mais les coefficients correspondants ne sont pas nuls. il faut appliquer l'élimination de Gauss ($L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$) pour les mettre égales à 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1 & 1/5 & 6 \\ 1 & \boxed{4/5} & 0 & -1/5 & 4 \\ 0 & 7/5 & 0 & 2/5 & -8 \end{bmatrix}$$

À partir de ce moment, nous pouvons poursuivre avec la méthode standard du simplexe Phase II. La colonne et la ligne du pivot sont $j = 2$ et $i = 2$, alors, après pivotement, nous trouvons

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1 & \boxed{1/4} & 5 \\ 5/4 & 1 & 0 & -1/4 & 5 \\ -7/4 & 0 & 0 & 3/4 & -15 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les nouvelles colonne et ligne de pivot sont $j = 4$ et $i = 1$, alors après pivotement, il vient

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_4 \\ x_2 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -30 \end{bmatrix} \end{array}$$

L'algorithme se termine à cette étape, et la solution optimale est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 10, 0, 20) \text{ avec } z = 30.$$

Ceci est bien conforme au graphique ci-dessus.

Phénomène de cyclage : Considérons l'exemple dû à Beale (1955) suivant.

$$\begin{cases} \min z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{s.c. } \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{11x_2}{2} - \dfrac{5x_3}{2} + 9x_4 \leq 0 \\ \qquad \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{3x_2}{2} - \dfrac{x_3}{2} + x_4 \leq 0 \\ \qquad x_1 \leq 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

En ajoute les variables d'écart, ce problème devient

$$\begin{cases} \min z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{s.c. } \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{11x_2}{2} - \dfrac{5x_3}{2} + 9x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{3x_2}{2} - \dfrac{x_3}{2} + x_4 + x_6 = 0 \\ \qquad x_1 + x_7 = 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Appliquons la méthode du simplexe (la Phase I est inutile car $b \geq 0$). Voici le tableau initial

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \end{array} \\ \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{1/2} & -11/2 & -5/2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & 57 & 9 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La colonne et la ligne de pivot sont $j = 1$ et $i = 1$, et alors après pivotement, on obtient

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -11 & -5 & 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & -8 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 5 & -18 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -53 & -41 & 204 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La colonne et la ligne de pivot sont $j = 2$ et $i = 2$. Après pivotement, il vient

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_7 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{1/2} & -4 & -3/4 & 11/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -2 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 4 & 3/4 & -11/4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -29/2 & 98 & 27/4 & 53/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La colonne et la ligne de pivot sont $j = 3$ et $i = 1$, alors après pivotement, on obtient

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_7 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -8 & -3/2 & 11/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \boxed{2} & 1/2 & -5/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 29 & 0 & 0 & -18 & -15 & 93 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La colonne et la ligne de pivot sont $j = 4$ et $i = 2$, alors après pivotement, on obtient

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_7 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & \boxed{1/2} & -9/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1/4 & -5/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 20 & 9 & 0 & 0 & -21/2 & 141/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La colonne de pivot est $j = 5$ et la ligne de pivot est $i = 1$. Après, pivotement, on trouve

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_5 \\ x_4 \\ x_7 \\ \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & 8 & 2 & 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -22 & 93 & 21 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La colonne de pivot est $j = 6$ et la ligne de pivot est $i = 2$, alors

$$\begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & -11/2 & -5/2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & 57 & 9 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce dernier tableau est exactement le tableau initial. Par conséquent, si on poursuit le simplexe, nous allons passé par les mêmes étapes que précédemment. Nous obtenons ainsi un problème qui boucle continuellement. Observons que la valeur de la fonction objective n'a pas bougé $z = 0$.

Exercice corrigés. Utiliser l'algorithme du simplexe à deux phase, pour résoudre le programme

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 &\leq 70 \\ x_1 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.4 Dualité en programmation linéaire

1.4.1 Introduction : exemple

On considère un atelier dans lequel il faut fabriquer deux produits A et B à l'aide de trois machines M_1, M_2 et M_3. Un Kg du produit A nécessite 2 heures sur la machine M_1, 4 heures sur la machine M_2 et 4 heures sur la machine M_3. Tandis qu'un Kg du produit B nécessite 4 heures sur la machine M_1, 2 heures sur la machine M_2 et 4 heures sur la machine M_3. On dispose de 12 heures sur la machine M_1, 12 heures sur la machine M_2 et 14 heures sur la machine M_3. La vente d'un Kg du produit A laisse un profit de 4 Dhs, alors que celle d'un Kg du produit B laisse un profit de 5 Dhs.

1. Soient x_1 la quantité du produit A et x_2 celle du produit B, alors le problème en question se modélise sous forme du programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} &\max 4x_1 + 5x_2 \\ &\text{s.c. } 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ &\qquad 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ &\qquad 4x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Supposons maintenant que le chef d'un autre atelier vaut louer la totalité du temps machine du premier atelier. Si on désigne par y_i le prix de location d'une heure machine M_i $(i = 1, 2, 3)$, le second industriel essayerait de minimiser lee prix de location, c'est-à-dire

$$12y_1 + 12y_2 + 14y_3.$$

Par contre le premier industriel n'acceptera pas de louer ses machines que si la location rapporte plus de profit que la fabrication des deux produits A et B, c'est-à-dire si

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 &\geq 4 \\ 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

Finalement, le problème du second industriel s'écrit en un (PL) de la forme

$$\begin{aligned} &\min 12y_1 + 12y_2 + 14y_3 \\ &\text{s.c.}\;\; 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 4 \\ &\qquad 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 5 \\ &\qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, si on écrit le premier (PL) sous la forme

$$(P)\;:\;\begin{cases} \max c^{\mathrm{T}} x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

on remarque que le second s'écrit sous la forme suivante

$$(D)\;:\;\begin{cases} \min b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On dit que les deux problèmes (P) et (D) sont en dualité (l'un est le problème dual de l'autre). Par exemple, si le problème (P) est appelé problème primal, le problème (D) sera appelé dual.

Exemple. — Cadre plus général. Considérons un problème de production. Notons :

- x_j le nombre d'unité du produit P_j fabriquées en entreprise I ($j = 1,..,n$),
- a_{ij} le nombre d'unité de la matière première M_i, utilisées pour fabriquer une unité de P_j,
- c_j le bénéfice de l'entreprise I en vendant une unité du produit P_j,
- b_i la disponibilité en matière première M_i, pour assurer la production dans l'entreprise.

Le programme linéaire pour déterminer le plan de production qui permet de maximiser le bénéfice de l'entreprise I s'énonce alors comme suit.

$$(P)\;:\;\begin{cases} \max c^{\mathrm{T}} x \\ \text{sous les contraintes de disponibilité :} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\; (i = 1,..,m) \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1,..,n). \end{cases}$$

Soient $A = (a_{ij})$, $x = (x_1,..,x_n)$, $c = (c_1,..,c_n)$, $b = (b_1,..,b_m)$, alors le problème (P) s'écrit

$$(P)\;:\;\begin{cases} \max c^{\mathrm{T}} x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Supposons que l'entreprise II essaie de s'emparer du marché. Sous l'hypothèse d'un comportement économique de l'entreprise I, celle-ci est prête à céder les matières premières à un prix qui est au moins aussi élevé que le bénéfice qu'elle fera en vendant ses produits.

Soit y_i le prix que l'entreprise II devra payer pour une unité de M_i, alors les contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j \quad (j = 1, .., n) \\ y_i \geq 0 \quad (i = 1, .., m). \end{cases}$$

En forme matricielle, ces contraintes sont comme suit

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} y \geq c \\ y = (y_1, .., y_m) \geq 0 \end{cases}$$

L'entreprise II essaiera de minimiser le coût d'achat des matières premières : il essaiera de minimiser

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = b^{\mathrm{T}} y.$$

Le dual du programme (P) de l'entreprise I, est le programme de l'entreprise II, qu'on écrit

$$(D) \ : \ \begin{cases} \min w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Synthèse Il y'a un lien mathématique étroit entre les deux programes primal et dual.

1.4.2 Construction du dual d'un programme linéaire

Pour tout programme linéaire (P) dit primal, il est possible de construire un autre programme linéaire (D), dit dual, et ceci à partir des mêmes données (fonction objective, coefficients des contraintes...). Si le primal, est une minimisation alors le dual est une maximisation, et à l'optimum, les valeurs respectives des deux fonctions objectives sont égales si elles sont finies.

Définition 1.15 Soit (P) le programme linéaire sous forme canonique, suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

À toute contrainte $i \in \{1, .., m\}$, on associe une variable $y_i \in \mathbb{R}$ (appelée variable duale). On appelle programme dual de (P), le problème de programmation linéaire suivant

$$(D) \ : \ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Définition 1.16 Soit (P) le programme linéaire sous forme standard, suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

À toute contrainte $i \in \{1,..,m\}$, on associe une variable $y_i \in \mathbb{R}$ (appelée variable duale). On appelle programme dual de (P), le problème de programmation linéaire suivant

$$(D) \ : \ \begin{cases} \max\, w = b^{\mathrm{T}}\, y \\ A^{\mathrm{T}}\, y \leq c \\ y \in \mathbb{R}^m \ \ \text{(variable libre)} \end{cases}$$

minimisation	maximisation
Fonction objectif min	Fonction objectif max
Second membre	Fonction objectif
A matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte i type ≥	Variable y_i ≥0
Contrainte i type =	Variable y_i sans signe
Variable x_j ≥0	Contrainte j type ≤
Variable x_j sans signe	Contrainte j type =

Figure 1.2: Tableau de correspondance Primal-Dual

Remarque. — Tableau de correspondance Primal-Dual. Dans ce tableau, on peut lire la transformation pour passer du primal au dual de gauche à droite mais aussi de droite à gauche. En fait, on lit de gauche à droite quand le primal est en minimisation, et de droite à gauche quand le primal est en maximisation.

Exemple. Considérons les deux exemples de programmes Primal-dual suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} \min\, z = 6x_1 + 1x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad ; \quad (D) \ : \ \begin{cases} \max\, w = 3y_1 - 2y_2 \\ 2y_1 - y_2 \leq 6 \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P) \ : \ \begin{cases} \min\, z = 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad ; \quad (D) \ : \ \begin{cases} \max\, w = -1y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1, y_2 \geq 0, \ y_3 \in \mathbb{R} \ \text{(variable libre)}. \end{cases}$$

Exemple. Déterminons le programme linéaire dual du programme suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} \min\, z = c^{\mathrm{T}}\, x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

D'abord, on ramène ce problème à sa forme canonique, alors

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x \leq b \\ -A x \leq -b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad (P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ \tilde{A} x \leq \tilde{b} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ou $\tilde{A}^{\mathrm{T}} = [A, -A]$ et $\tilde{b}^{\mathrm{T}} = (b, -b)$. Par définition, le problème dual correspondent s'écrit

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max w = \tilde{b}^{\mathrm{T}} \tilde{y} \quad \text{avec} \\ \tilde{A}^{\mathrm{T}} \tilde{y} \geq c \\ \tilde{y} = (u, v) \geq 0 \end{cases} \quad \underset{\text{(En posant } y = u - v)}{\text{ou de manière équivalente}} \quad (D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \geq c \\ y \in \mathbb{R}^m \text{ (libre de signe)} \end{cases}$$

Proposition 1.2 — Transformation Primal-Dual est involutive. Le dual d'un dual est un programme linéaire équivalent au primal.

Preuve. *Pour le dual de la définition 1.15, on a le programme dual de*

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

est le programmation linéaire suivant

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \textit{ou de manière équivalente} \quad (D)\ :\ \begin{cases} \min w' = (-b)^{\mathrm{T}} y \\ (-A)^{\mathrm{T}} y \geq -c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Le dual du problème dual (D) *est donc donné par*

$$(\tilde{D})\ :\ \begin{cases} \max z' = (-c)^{\mathrm{T}} x \\ [(-A)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} x \leq -b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \textit{ou de manière équivalente} \quad (\tilde{D})\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} y \\ A x \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

■

Le théorème suivant affirme que les opérations permettant de transformer un programme primal en un programme primal équivalent ne nuisent pas la dualité.

Théorème 1.8 Si le programme (P_1) est transformé en un équivalent (P_2) par les opérations :

- remplacer une variable libre de (P_1) par la différence de deux variables d'écart positives.
- remplacer une contrainte d'inégalité par une contrainte égalité par l'introduction d'une variable d'écart positive.
- éliminer les contraintes égalités redondantes.

Les programmes duaux (D_1) et (D_2) des programmes (P_1) et (P_2) sont équivalents (ils sont soit irréalisables ou soit ils ont la même solution optimale).

Remarque. Des définitions précédentes, on a les deux paires de problèmes primal-dual suivantes :

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x \geq b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad ; \quad (D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$(P')\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x = b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad ; \quad (D')\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \in \mathbb{R} \ \ (\text{variable libre}). \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut passer d'une paire de problèmes primal-dual à l'autre.

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x - 0^{\mathrm{T}} s \\ A x - I s = b \\ x, s \geq 0. \end{cases} \quad ; \quad (D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ -I^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ -I y \leq 0 \end{cases}$$

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0. \end{cases}$$

1.4.3 Théorème fondamental de la dualité

Reprenons la paire de programmes linéaires primal-dual donnée par la formulation suivante.

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x = b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad ; \quad (D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \end{cases}$$

Théorème 1.9 — Dualité faible. Si x^* est une solution réalisable du problème primal (P) et si y^* est une solution réalisable du problème dual (D), alors

$$c^{\mathrm{T}} x^* \geq b^{\mathrm{T}} y^*.$$

Preuve. *Comme* $b^{\mathrm{T}} y^* = (Ax^*)^{\mathrm{T}} y^* = x^{*\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} y^* = x^{*\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} y^*)$ *et comme* $A^{\mathrm{T}} y^* \leq c$*, il vient*

$$b^{\mathrm{T}} y^* \leq x^{*\mathrm{T}} c = c^{\mathrm{T}} x^*.$$

■

Ce résultat montre qu'une solution réalisable d'un des deux programmes linéaires qui sont en relation de dualité, fournit une borne à la valeur de l'autre programme. De ce premier résultat, il est possible d'en déduire les deux conséquences suivante.

1. Si le primal est non-borné, alors le dual est irréalisable, par exemple

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Si le dual est non-borné, alors le primal est irréalisable, par exemple

$$\begin{cases} \max w = y_1 + y_2 \\ -y_1 \leq -2 \\ -y_2 \leq -1 \\ y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Corollaire 1.3 Si x^* (resp. y^*) est solution réalisable du primal (resp. dual associé) vérifiant

$$b^{\mathrm{T}} y^* = c^{\mathrm{T}} x^*.$$

Alors, x^* (resp. y^*) est une solution optimale du problème primal (resp. dual associé).

Ce corollaire postule également que si l'un ou l'autre des deux programmes (P) ou (D) ont une solution optimale finie alors l'autre a nécessairement une solution optimale finie et les valeurs respectives des fonctions objectif sont égales

$$b^{\mathrm{T}} y^* = c^{\mathrm{T}} x^*.$$

Preuve. *Soit* $\widehat{x}$ *une solution quelconque du problème primal* (P)*, alors*

$$c^{\mathrm{T}} \widehat{x} \geq (A^{\mathrm{T}} y^*)^{\mathrm{T}} \widehat{x} = (y^{*\mathrm{T}} A) \widehat{x} = y^{*\mathrm{T}} (A \widehat{x}) \geq y^{*\mathrm{T}} b = b^{\mathrm{T}} y^*.$$

Or on a $b^{\mathrm{T}} y^* = c^{\mathrm{T}} x^*$*, alors* $c^{\mathrm{T}} \widehat{x} \geq c^{\mathrm{T}} x^*$*, et donc* x^* *est solution optimal du programme primal. De la même manière, pour tout solution quelconque* $\widehat{y}$ *du problème dual* (D)*, on a*

$$b^{\mathrm{T}} \widehat{y} = \widehat{y}^{\mathrm{T}} b \leq \widehat{y}^{\mathrm{T}} (Ax^*) = (\widehat{y}^{\mathrm{T}} A) x^* = (A^{\mathrm{T}} \widehat{y})^{\mathrm{T}} x^* \leq c^{\mathrm{T}} x^*$$

Or $c^{\mathrm{T}} x^* = b^{\mathrm{T}} y^*$*, alors* $b^{\mathrm{T}} \widehat{y} \leq b^{\mathrm{T}} y^*$*, et donc* y^* *est solution optimal du programme dual.*

■

Corollaire 1.4 Si l'un des deux problèmes en dualité (P) et (D) admet une solution infinie (non bornée), alors l'autre n'admet pas de solution réalisable.

Preuve. *Supposons que c'est le problème primal (P) qui admet une solution infinie. Supposons que son problème dual (D) admet une solution réalisable $\bar{y}$. Il vient du théorème 1.9 de la dualité faible, que $c^{\mathrm{T}}x \geq b^{\mathrm{T}}\bar{y}$ pour tout solution réalisable x du problème (P), et donc ce dernier ne devrait pas avoir une solution infinie, absurde.*

■

Lemme 1.1 — Dualité forte. Supposons le problème primal (P) a un optimum finie et soit π^* le multiplicateur du simplexe associé à une solution optimale x^*, alors π^* est une solution optimale du problème dual associé (D).

Preuve. *Soit x^* une solution optimale du problème primal (P), montrons que π^* est solution du problème dual (D) telle que $b^{\mathrm{T}}\pi^* = c^{\mathrm{T}}x$. Comme $\bar{c}_j = c_j - \pi^{*\mathrm{T}}A_j \geq 0$ pour tout j hors-base, et comme $\bar{c}_j = 0$ pour tout j en base, on a*

$$A^{\mathrm{T}}\pi^* = (\pi^{*\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} \leq c.$$

De plus, si B une base primal associée à x^*, on aura $\pi^{*\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$ d'où $\pi^{*\mathrm{T}}b = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$, et donc

$$\pi^{*\mathrm{T}}b = c_B^{\mathrm{T}}x_B^* = c^{\mathrm{T}}x^* \quad car \quad c^{\mathrm{T}} = [c_B^{\mathrm{T}}; c_R^{\mathrm{T}}] \quad et \quad x^{*\mathrm{T}} = [x_B^{*\mathrm{T}}; 0] .$$

■

Théorème 1.10 — Fondamentale. Quand deux problèmes de programme linéaire (P) et (D) sont en dualité, seuls les trois cas suivants peuvent se produire.

1. Les deux problèmes ont chacun au moins une solution réalisable. Dans ce cas, les deux problèmes sont bornés et réalisent le même objectif à l'optimum

$$z^* = \min_{x\in\mathcal{P}} z(x) = z(x^*) = c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^* = \omega(y^*) = \max_{y\in\mathcal{Q}} \omega(y) = \omega^*.$$

2. L'un des problèmes n'a pas de solution et l'autre a une solution. Ce dernier est non borné.
3. Aucun des deux problèmes primal et dual n'admet de solution.

Remarque. Si l'un des problèmes (P) ou (D) a une solution optimale avec coût fini, alors il est de même pour l'autre. Et dans ce cas, ils sont bornés et réalisent le même coût à l'optimum

$$z^* = z(x^*) = \min_{x\in\mathcal{P}} z(x) = \max_{y\in\mathcal{Q}} \omega(y) = \omega(y^*) = \omega^*.$$

Si l'un des deux problèmes est non borné, alors l'autre n'a pas de solution réalisable (à coût fini).

Preuve. *Supposons le primal (P) a une solution de base x^* (associée à la base B) tel que*

$$c^{\mathrm{T}}x^* = z^*.$$

Soit π^* le multiplicateur du simplexe associé à la base B. Les coûts réduits sont donnés par

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^{*\mathrm{T}}A_j$$

où A_j dénote la $j^{ème}$ colonne de la matrice A. Supposons que cette solution est optimale, alors

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,n\}, \quad \bar{c}_j = c_j - \pi^{*\mathrm{T}}A_j \geq 0.$$

Par suite, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, on obtient

$$\pi^{*\mathrm{T}}A_j \leq c_j \quad ou \quad A_j^{\mathrm{T}}\pi^* \leq c_j.$$

Cette condition s'écrit sous la forme matricielle $A^{\mathrm{T}}\pi^* \leq c$, et ceci implique

$$\pi^* \in \mathcal{Q} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \; ; \; A^{\mathrm{T}} y \leq c \right\}.$$

Donc π^* est une solution réalisable pour le dual. D'autre part, on a $\pi^* = (B^{-1})^{\mathrm{T}} c_B$, et alors

$$b^{\mathrm{T}}\pi^* = b^{\mathrm{T}}(B^{-1})^{\mathrm{T}} c_B = (B^{-1}b)^{\mathrm{T}} c_B = (x_B^*)^{\mathrm{T}} c_B = z^*.$$

Il découle du corollaire de la dualité faible 1.3 que π est une solution optimale du dual et que

$$\pi^{*\mathrm{T}} b = b^{\mathrm{T}}\pi^* = z^*.$$

Supposons que $\max_{y\in\mathcal{Q}} \omega(y) = +\infty$, c'est-à-dire que pour tout $M > 0$, il existe y_0 tel que

$$b^{\mathrm{T}} y_0 > M.$$

Si le problème primal (P) a une solution x^*, il vient du Lemme 1.9) que $b^{\mathrm{T}} y_0 \leq c^{\mathrm{T}} x^*$, et donc

$$M < c^{\mathrm{T}} x^*.$$

Absurde, et cette contradiction implique que le problème primal (P) n'admet pas de solution.

■

Exemple. Considérons le programme linéaire dont les formes primale et duale sont :

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = -2x_1 - x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad ; \qquad (D)\ :\ \begin{cases} \max \omega = 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ -2 - y_1 - y_3 \geq 0 \\ -1 - y_2 - y_3 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce programme admet la solution primal optimale donnée par

$$(x^*, y^*) = (2, 1) \text{ avec } z^* = -5.$$

Alors qu'il admet également la solution duale optimale

$$(y_1, y_2, y_3) = (-1, 0, -1) \text{ avec } \omega^* = -5.$$

On observe que la valeur minimal du problème primal est égale à la valeur maximale du dual.

Remarque. — Primal ou dual pour l'application de l'algorithme du simplexe. Dans certains cas, il est plus intéressant d'appliquer l'algorithme du simplexe à un problème dual (ou plutôt à sa forme standard associée) plutôt qu'au problème primal. Considérons en effet un primal ayant $p = 1000$ contraintes pour seulement $q = 100$ inconnues. La forme standard associée au primal (après introduction des variables d'écart) aura $m = 1000$ contraintes pour $n = p + q = 1100$ inconnues. L'algorithme du simplexe dans ce cas nécessite à chaque étape de résoudre un système de taille 1000×1000. À l'inverse, le problème dual possède $p = 100$ contraintes pour $q = 1000$ inconnues. Le problème standard qui lui est associé possède donc $m = 100$ contraintes pour $n = p + q = 1100$ inconnues. L'algorithme du simplexe dans ce deuxième cas ne nécessite plus donc à chaque étape "que" de résoudre un système de taille 100×100, ce qui constitue un gain énorme. En résumé, il est donc préférable de considérer en priorité la version (primale ou duale) qui possède le moins de contraintes.

1.4.4 Théorème des écarts complémentaires

La relation entre les solutions d'un problème primal et celles du problème dual associé est définie par le théorème des écarts complémentaires. Pour le formuler, considérons d'abord la paire de problèmes primal-dual suivante.

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad (D)\ :\ \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c. \end{cases}$$

Théorème 1.11 — Écarts complémentaires. Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux solutions réalisables resp., du problème primal et du problème dual. Alors, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont solutions optimales du problème primal et du problème dual, respectivement, si et seulement si pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a

$$\bar{x}_i > 0 \implies \bar{y}^{\mathrm{T}} A_i = c_i$$
$$\bar{y}^{\mathrm{T}} A_i < c_i \implies \bar{x}_i = 0$$

ou de manière équivalente, pour tout $j = 1, \cdots, m$, on a

$$\bar{y}_j > 0 \implies A^j \bar{x} = b_j$$
$$A^j \bar{x} > b_j \implies \bar{x}_j = 0$$

où A_i (resp. A^j) est la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. $j^{\text{ème}}$ colonne) de la matrice A.

Preuve. *Supposons que les conditions* (1.) *et* (2.) *sont satisfaites pour tout* $j = 1, \ldots, n$, *alors*

$$(c_j - y^{\mathrm{T}} A^j) x_j = 0.$$

Or on a $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} y^{\mathrm{T}} A^j x_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - y^{\mathrm{T}} A^j) x_j = 0$, *alors*

$$c^{\mathrm{T}} x - b^{\mathrm{T}} y = c^{\mathrm{T}} x - y^{\mathrm{T}} b = c^{\mathrm{T}} x - y^{\mathrm{T}} A x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} y^{\mathrm{T}} A^j x_j = 0.$$

Par conséquent, on obtient $b^{\mathrm{T}} y = c^{\mathrm{T}} x$, *et d'après le corollaire 1.3 du théorème de dualité faible, il vient que* x *et* y *sont des solutions optimales respectivement pour les problèmes primal et dual. Inversement, supposons que les solutions* x *et* y *sont optimales respectivement pour le primal et le dual. En se référant au début de la preuve, on a*

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - y^{\mathrm{T}} A^j) x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} y^{\mathrm{T}} A^j x_j = c^{\mathrm{T}} x - y^{\mathrm{T}} A x = c^{\mathrm{T}} x - y^{\mathrm{T}} b = c^{\mathrm{T}} x - b^{\mathrm{T}} y = 0.$$

Et puisque $x_i \geq 0$ *et* $A^{\mathrm{T}} y \leq c_j$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$, *alors*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}; \quad (c_j - y^{\mathrm{T}} A^j) x_j = 0.$$

Montrons que si (P) *admet un optimum non borné, alors* (D) *n'a pas de solution. Par l'absurde, supposons que soit* (D) *admet une solution finie, ou soit* (D) *admet une solution non bornée* $+\infty$. *Si cette solution est finie, alors d'après* (1.) *du théorème 1.10, l'autre solution de* (P) *est finie et*

$$z^* = \min_{x \in \mathcal{P}} z(x) = \max_{y \in \mathcal{Q}} w(y) = w^*.$$

Absurde, car (P) *admet un optimum non borné, et si cette solution est* $\max_{y\in\mathcal{Q}} w(y) = +\infty$*, alors*

$$\forall M > 0, \exists y_0 \in \mathcal{Q} = \left\{y \in \mathbb{R}^n \; ; \; A^{\mathrm{T}} y \le c \, , \; y \ge 0\right\} \quad \textit{tel que} \quad b^{\mathrm{T}} y_0 > M.$$

Si (P) *admet une solution optimale* $\bar{x}$*, alors* $z(\bar{x}) = c^{\mathrm{T}}\bar{x} = \bar{x}^{\mathrm{T}}c \in \mathbb{R}$ *est fini. De plus, on a*

$$M < b^{\mathrm{T}} y_0 = y_0^{\mathrm{T}} b = y_0^{\mathrm{T}} (A\bar{x}) = (A^{\mathrm{T}} y_0)^{\mathrm{T}} \bar{x} \le c^{\mathrm{T}} \bar{x}.$$

On obtient ainsi $M < c^{\mathrm{T}}\bar{x}$ *pour tout* $M > 0$*, et donc pour* $M \to +\infty$*, il vient*

$$z(\bar{x}) = c^{\mathrm{T}} \bar{x} = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

Absurde, et donc le problème primal (P) *admet un optimum non borné.*

■

Considérons maintenant l'autre paire de problèmes primal-dual, donnée par

$$(P) \; : \; \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x \ge b \\ x \ge 0 \end{cases} \quad ; \quad (D) \; : \; \begin{cases} \max w = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \le c \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Théorème 1.12 — Écarts complémentaires. Soient x et y deux solutions réalisables respectivement du problème primal et du problème dual. Les vecteurs $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont des solutions respectivement optimales pour le problème primal et le problème dual si et seulement si

$$\begin{aligned} &(c - A^{\mathrm{T}}\bar{y})\,\bar{x} = 0 \quad \text{c-à-dire} \quad \forall\, j = 1,..,n; \;\; (c_j - \bar{y}^{\mathrm{T}} A^j)\,\bar{x}_j = 0, \\ &\bar{y}^{\mathrm{T}}(A\bar{x} - b) = 0 \quad \text{c-à-dire} \quad \forall\, i = 1,..,m; \;\; \bar{y}_i\,(A_i\bar{x} - b_i) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

où A_i (resp. A^j) est la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. $j^{\text{ème}}$ colonne) de la matrice A.

Les conditions (1.6) sont dites de complémentarité, et elles s'écrivent également sous la forme

$$y_i > 0 \implies A_i x = b_i \quad \text{et} \quad A_i x > b_i \implies y_i = 0, \tag{1.7}$$

$$x_j > 0 \implies y^{\mathrm{T}} A^j = c_j \quad \text{et} \quad y^{\mathrm{T}} A^j < c_j \implies x_j = 0. \tag{1.8}$$

Preuve. *Ce théorème peut être démontré comme un corollaire du théorème des écarts complémentaires 1.11. écrivons le problème primal sous une forme standard en introduisant des variables d'écarts* s_i *où* $i = 1, \cdots, m$*. Le problème primal* (P) *devient*

$$(P) \; : \; \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x - \mathrm{I} s = b \\ x, s \ge 0 \end{cases}$$

Le dual de ce nouveau problème s'écrit

$$(D) \; : \; \begin{cases} \max \omega = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \le c \\ -\mathrm{I} y \le 0 \end{cases} \quad \textit{ou encore} \quad (D) \; : \; \begin{cases} \max \omega = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \le c \\ \mathrm{I} y \ge 0 \end{cases}$$

Appliquons le théorème précédent pour la nouvelle paire de problèmes primal-dual suivants

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x - \mathrm{I} s = b \\ x,\, s \geq 0, \end{cases} \quad ; \quad (D)\ :\ \begin{cases} \max\, \omega = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ -\mathrm{I} y \leq 0. \end{cases}$$

Alors, pour $j = 1, \cdots, n$, on obtient

1. $x_j > 0 \implies y^{\mathrm{T}} A^j = c_j$,
2. $y^{\mathrm{T}} A^j < c_j \implies x_j = 0$

où A^j est la $j^{ème}$ colonne de la matrice A. Et pour $i = 1, \cdots, m$, on vient

1. $s_i > 0 \implies -y_i = 0$,
2. $-y_i < 0 \implies s_i = 0$.

Or $s_i = A_i x - b_i$ où A_i est la $i^{ème}$ ligne de la matrice A, donc il en résulte que

1. $A_i x > b_i \implies y_i = 0$,
2. $y_i > 0 \implies A_i x = b_i$.

■

Remarques. *1. Si l'on introduit des variables d'écart $z_i \geq 0$, $\forall i$, pour les contraintes d'inégalités du problème primal et des variables d'écarts $w_j \geq 0$, $\forall j$ pour les contraintes d'inégalités du problème dual, les conditions de complémentarité* (1.6) *deviennent*

$$\begin{aligned} y_i z_i &= 0, \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ w_j x_j &= 0, \quad \forall j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. La première condition est toujours vérifiée si le problème primal est sous forme standard. Si le primal a une solution optimale x^* telle que l'inégalité $A_i x^* > b_i$ est vérifiée, alors le théorème de complémentarité implique nécessairement que la variable duale associée à cette inégalité est telle que $y_i^* = 0$. Toute contrainte inactive à l'optimum peut être supprimée du problème primal sans modifier la valeur du coût optimal et il est donc inutile d'y associer une pénalité y_i^* non nulle.

3. Si le problème primal est sous forme standard, alors pour toute variable de base réalisable optimale non dégénérée $x_j \neq 0$, la seconde condition de complémentarité $y^{\mathrm{T}} A_j = c_j$ permet d'obtenir le vecteur des variables duales par l'inversion d'un système linéaire

$$y^{\mathrm{T}} = c_B A_B^{-1},$$

où c_B est le sous-vecteur du critère primal correspondant aux variables de base.

Théorème 1.13 — Théorème des écarts complémentaires stricts. Si un problème de programmation linéaire a une solution optimale, alors il existe une solution optimale (x^*, z^*) du problème primal et une solution optimale (y^*, ω^*) du problème dual telles que

$$x^* + \omega^* > 0 \quad \text{et} \quad y^* + z^* > 0.$$

Exemple. Considérons le problème de minimisation suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème s'écrit sous la forme suivante

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 340 \\ 2400 \\ 560 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1100 \\ 1400 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

Les solutions optimales des problèmes primal et dual sont

$$\bar{x} = (800, 0, 300, 0, 0, 200)^{\mathrm{T}} \qquad \bar{y} = (120, 220, 0, 0, 1500, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Vérifions les relations de complémentarité ($m = n = 3$)

$$\left(c_1 - \bar{y}\right)A^1\right)\bar{x}_j = \left(340 - (120, 220, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \times 800 = (340 - 340) \times 800 = 0,$$

$$\left(c_2 - \bar{y}\right)A^2\right)\bar{x}_2 = \left(2400 - (120, 220, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \times 0 = (2400 - 900) \times 0 = 0,$$

$$\left(c_3 - \bar{y}\right)A^3\right)\bar{x}_3 = \left(560 - (120, 220, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \times 300 = (560 - 560) \times 300 = 0.$$

Et de même un calcul de $\bar{y}_i\ (A_i\bar{x} - b_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ donne

$$\bar{y}_i\ (A_i\bar{x} - b_i) = 0.$$

1.4.5 Calcul de la solution dual à partir de la solution primal

On discute ici de comment on peut calculer la solution dual à l'aide du tableau final du simplexe appliqué au problème primal. On illustre ceci avec deux exemples. Considérons le problème suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème s'écrit sous la forme

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ A x \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad (P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ [-A] x \leq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du simplexe à la forme de droite. Après Phases I et II, le tableau final est

$$\begin{array}{c} x_6 \\ x_3 \\ x_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 300 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 1500 & 0 & 120 & 220 & 0 & -440000 \end{bmatrix}$$

La solution primal optimal est alors

$$x = (x_1, .., x_6) = (800, 0, 300, 0, 0, 200).$$

Calculons la solution du problème dual du primal (P). Le problème dual s'écrit

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max z = 1100 y_1 + 1400 y_2 + 1500 y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 340 \\ 2 y_1 + 3 y_2 + y_3 \leq 2400 \\ y_1 + 2 y_2 + 3 y_3 \leq 560 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type suivant

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max \omega = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad (D)\ :\ \begin{cases} -\min \omega = -b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode du simplexe, il vient après la Phase II (car $c \geq 0$), que le tableau final est

$$\begin{array}{c} y_1 \\ y_5 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 & 1500 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 220 \\ 0 & 0 & 200 & 800 & 0 & 300 & 440000 \end{bmatrix}$$

La solution dual optimal est alors

$$y = (y_1, .., y_6) = (120, 220, 0, 0, 1500, 0).$$

Synthèse On observe dans l'exemple ci-dessus, que la solution y se trouve à la dernière ligne du tableau primal final. En effet, les coefficients c_i de la dernière ligne du tableau dual correspondent à

$$c_4 = y_1 = 120;\ c_5 = y_2 = 220;\ c_6 = y_3 = 0;\ c_1 = y_4 = 0;\ c_2 = y_5 = 1500;\ c_3 = y_6 = 0.$$

En parfaite dualité, on a les mêmes relations par rapport au tableau du problème dual. On obtient que les coefficients c_i de la ligne colonne du tableau dual correspondent à

$$c_4 = x_1 = 800;\ c_5 = x_2 = 0;\ c_6 = x_3 = 300;\ c_1 = x_4 = 0;\ c_2 = x_5 = 0;\ c_3 = x_6 = 200.$$

Exemple. — Voici un autre exemple. Considérons le problème

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = 50x_1 + 80x_2 \\ 3x_1 \geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème s'écrit sous la forme

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad (P)\ :\ \begin{cases} \min z = c^{\mathrm{T}} x \\ [-A]x \leq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du simplexe à la forme de droite. Après Phases I et II, le tableau final est

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/6 & -1/4 & 0 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1/6 & -5/4 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 10/3 & 20 & 0 & -220 \end{bmatrix}$$

La solution primal optimal est alors

$$x = (x_1, .., x_5) = (2, 3/2, 0, 0, 7/2).$$

Calculons la solution du problème dual. Le dual s'écrit

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max z = 6y_1 + 10y_2 + 8y_3 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 50 \\ 4y_2 + 5y_3 \leq 80 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type suivant

$$(D)\ :\ \begin{cases} \max \omega = b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad (D)\ :\ \begin{cases} -\min \omega = -b^{\mathrm{T}} y \\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode du simplexe, il vient après la Phase II (car $c \geq 0$), que le tableau final est

$$\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 & 10/3 \\ 0 & 1 & 5/4 & 0 & 1/4 & 20 \\ 0 & 0 & 7/2 & 2 & 3/2 & 220 \end{bmatrix}$$

La solution dual optimal est alors

$$y = (y_1, .., y_5) = (10/3, 20, 0, 0, 0).$$

On observe que la solution dual y se trouve à la dernière ligne du tableau final du simplexe du problème primal. En effet, les coefficients c_i de la dernière ligne du tableau primal correspondent à

$$c_3 = y_1 = 10/3;\ c_4 = y_2 = 20;\ c_5 = y_3 = 0;\ c_1 = y_4 = 0;\ c_2 = y_5 = 0.$$

En parfaite dualité, on a les mêmes relations par rapport au tableau final du problème dual. On obtient que les coefficients c_i de la dernière du tableau dual correspondent à

$$c_4 = x_1 = 2\,;\; c_5 = x_2 = 3/2\,;\; c_1 = x_3 = 0\,;\; c_2 = x_4 = 0\,;\; c_3 = x_5 = 7/2.$$

Notons que les relations de complémentarité $\left(c_i - \overline{y})A^i\right)\overline{x}_i = \overline{x}_i\overline{y}_{m+i} = 0$ $(i = 1,2)$ sont satisfaites

$$x_1\,y_4 = 20 = 0\,;\;\; x_2\,y_5 = 3/20 = 0.$$

Idem, pour la seconde relation de complémentarité $\overline{y}_j\left(A_j\overline{x} - b_j\right) = \overline{y}_j\overline{x}_{n+i} = 0$ $(j = 1,2,3)$, on a

$$y_1\,x_3 = 10/30 = 0\,;\;\; y_2\,x_4 = 200 = 0\,;\;\; y_3\,x_5 = 07/2 = 0.$$